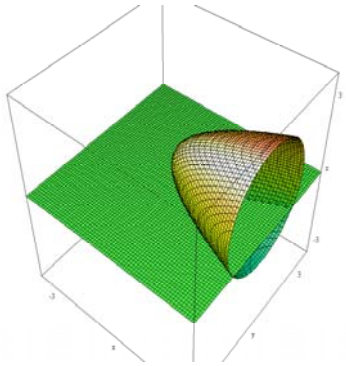
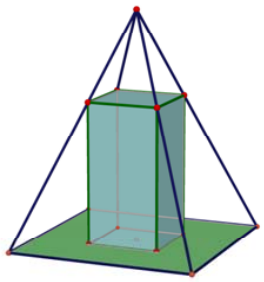
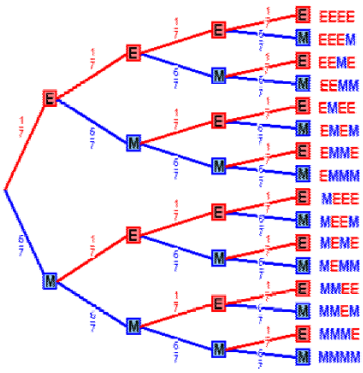
PZ-Information 11/2009

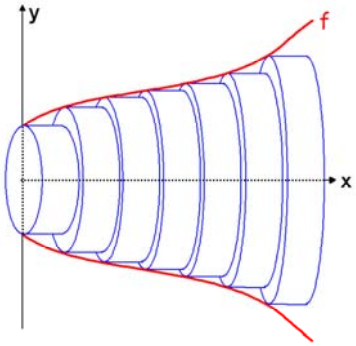
Handreichung zur Erstellung von Kursarbeits- und Abituraufgaben für das Fach Mathematik in der MSS

Mathematik









PÄDAGOGISCHES ZENTRUM RHEINLAND-PFALZ

In den „PZ-Informationen“ werden Ergebnisse veröffentlicht, die von Lehrerinnen und Lehrern aller Schularten in Arbeitsgruppen zusammengetragen und vor dem Hintergrund der pädagogischen oder fachdidaktischen Diskussion aufbereitet wurden.

Mit ihnen sollen Anregungen gegeben werden, wie in den Schulen auf der Grundlage von Bildungsstandards, Rahmenplänen, Lehrplänen oder anderen Vorgaben gearbeitet werden kann. Im Mittelpunkt steht der tägliche Unterricht. Damit verbunden ist die Absicht, seine Vorbereitung und Durchführung zu bereichern und den Schulen Impulse für ihre Weiterentwicklung zu geben.

Für Lehrerinnen, Lehrer und pädagogische Fachkräfte, die unsere Anregungen aufgreifen und das vorliegende Material durch eigene Erfahrungen und Ergebnisse verändern oder ergänzen wollen, ist das Pädagogische Zentrum ein aufgeschlossener Partner.

Herausgeber:
Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz (PZ)
Röntgenstraße 32, 55543 Bad Kreuznach
Postfach 2152, 55511 Bad Kreuznach
Telefon: (0671) 84088-0
Telefax: (0671) 84088-10
E-Mail: pz@pz.bildung-rp.de
URL: http://pz.bildung-rp.de

Wir danken folgenden Kolleginnen und Kollegen für die Bereitstellung von Aufgabenbeispielen:

Gabriele Lapport	Hohenstaufen-Gymnasium, Kaiserslautern
Helmut Hürter	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien, Kaiserslautern
Michael Martin	St.-Franziskus-Gymnasium und -Realschule, Kaiserslautern
Georg Wiederstein	Gymnasium im Kannenbäckerland, Höhr-Grenzhausen
Franz Hein	Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur, Mainz
Stefan Damp	Sebastian-Münster-Gymnasium, Ingelheim
Rudolf Müller	Stefan-George-Gymnasium, Bingen

Autorinnen und Autoren:
Michael Bostelmann, Staatl. Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien, Koblenz
Angela Euteneuer, Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach
Hellen Ossmann, Stefan-George-Gymnasium, Bingen

Redaktion:
Angela Euteneuer, Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

Skriptbearbeitung:
Ute Nagelschmitt, Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

© Bad Kreuznach 2009
Soweit die vorliegende Handreichung Nachdrucke enthält, wurden dafür nach bestem Wissen und Gewissen Lizenzen eingeholt. Sollten dennoch in einigen Fällen Urheberrechte nicht berücksichtigt worden sein, wenden Sie sich bitte an das Pädagogische Zentrum Rheinland-Pfalz.

Die vorliegende PZ-Veröffentlichung wird gegen eine Schutzgebühr von 3,00 Euro zzgl. Versandkosten abgegeben. Ab sofort ist für den Versand unserer Materialien das ifb Speyer zuständig. Wenden Sie sich bitte daher bei Bestellungen und Rückfragen an:
bestellung@ifb.bildung-rp.de
Seit dem 01.01.2004 beträgt der Mindestbetrag für die bestellte Veröffentlichung inklusive Verpackungs- und Versandkosten 5,00 Euro.

ISSN 0938-748X

Pädagogisches Zentrum
Rheinland-Pfalz
Bad Kreuznach

PZ-Information 11/2009

Mathematik

Handreichung zur Erstellung von Kursarbeits- und Abituraufgaben für das Fach Mathematik in der MSS

Inhalt

		Seite
1	**Vorwort**	**5**
2	**Formale Grundlagen**	**6**
2.1	**Berücksichtigung der Sachgebiete**	**6**
2.2	**Erstellen der Aufgabenvorschläge**	**7**
2.3	**Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfachanforderungen**	**7**
3	**Konsequenter Aufbau mathematischer Kompetenzen in der MSS**	**8**
4	**Entwicklung einer Aufgabenkultur**	**9**
4.1	**Aufgabenanalyse und Kompetenzorientierung**	**9**
4.2	**Differenzierung in Grund- und Leistungsfachanforderungen**	**13**
5	**Aufgabenbeispiele**	**16**
5.1	**Analysis**	**16**
5.1.1	Beispiel e-Funktion	16
5.1.2	Beispiel Rotationsvolumen	22
5.1.3	Beispiel Globale Bevölkerungsdynamik	26
5.1.4	Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Analysis	30
5.2	**Lineare Algebra**	**34**
5.2.1	Beispiel für eine Populationsentwicklung – Käferpopulation	34
5.2.2	Beispiel Spatprodukt - Lineare Algebra Teilaufgabe	37
5.2.3	Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Analytischen Geometrie, Wahlpflichtbereich 1	40
5.3	**Wahrscheinlichkeitsrechnung**	**44**
5.3.1	Beispiel Münzwurf	45
5.3.2	Schaferkrankung	50
5.3.3	Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Stochastik	53
5.3.4	Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Stochastik	56

5.4 Aufgaben, die unterschiedliche mathematische Themenbereiche miteinander verbinden 60
5.4.1 Lineare Algebra – Analysis 60
5.4.2 Lineare Algebra – Analysis 61
5.4.3 Analytische Geometrie – Analysis 63
5.4.4 Analysis - Analytische Geometrie 63
5.4.5 Analysis – Stochastik 64

6 Das mündliche Abitur 65
6.1 Grundlagen 65
6.1.1 Aufgabenstellung 65
6.1.2 Prüfungsgespräch 66
6.1.3 Bewertung 67
6.2 Planung und Durchführung der Prüfung 67
6.3 Aufgabenbeispiele 68
6.3.1 Analysis: Funktionen – Ableitungen – Graphen 68
6.3.2 Analysis: Graphentypen 69
6.3.3 Analysis: Ein Optimierungsproblem 71
6.3.4 Analytische Geometrie: Objekte im Raum – Abstände 72
6.3.5 Analytische Geometrie: Achsenspiegelung in der Ebene 73
6.3.6 Lineare Algebra: Mehrstufige Prozesse 74
6.3.7 Stochastik: Zwei Artikel – eine Quelle? 75
6.3.8 Stochastik: Analyse von Lottospielen 76
6.3.9 Stochastik: Übertragung von Morsezeichen 77

7 Literatur 78

1 Vorwort

Wenn Lehrerinnen und Lehrer in Rheinland-Pfalz die Aufgaben für das schriftliche Abitur erstellen, gibt es für sie das sog. Abiturrundschreiben,[1] das - stets aktualisiert - die wichtigsten Anforderungen und die zu berücksichtigenden Regelungen für die Abiturprüfung zusammenfasst. Außerdem gelten die von der KMK erstellten einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik,[2] um die Transparenz, Vergleichbarkeit und Einheitlichkeit der Prüfungsverfahren und -anforderungen bundesweit zu sichern.

Obwohl diese Materialien bereits Anregungen und Hinweise zur Aufgabenkonstruktion und -auswahl geben, wollen Mitglieder der Abiturauswahlkommission auf Grund der Erfahrungen der letzten Jahre noch einmal zusammenfassend deutlich machen, wie Aufgaben im Sinne der o. g. Richtlinien gestaltet werden können. Auch sollen junge Kolleginnen und Kollegen, die zum ersten Mal Abituraufgaben erstellen, unterstützt werden. Viele der Aufgaben, die im Internet, in Schulbüchern oder Aufgabensammlungen bisher veröffentlicht wurden, sind noch zu stark am Kalkül orientiert und haben keine Teilaufgaben, bei denen Grundvorstellungen und Verfahren bewertet oder eingeschätzt werden müssen.

Im Anschluss an den veränderten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, der Aufgaben verlangt, die bei Schülerinnen und Schülern neben dem Rechnen vor allem die Kompetenzen Argumentieren, Modellieren und Kommunizieren entwickeln und fördern, wird das Ziel des Unterrichts der Sekundarstufe II in den EPA so beschrieben: „Das Anwenden mathematischer Begriffe und Methoden auf inner- und außermathematische Problemstellungen erfordert neben einem soliden Basiswissen Sicherheit im Erkennen und Nutzen der Vernetzung mathematischer Inhalte und Verfahren sowie die Kompetenz zu selbstständigem Erschließen und Bearbeiten. Das Verstehen zentraler Begriffe und Problemlöse-Verfahren tritt gleichberechtigt neben den sicheren Umgang mit Symbolen und Kalkülen."

Über den Unterricht heißt es: „Die in der Abiturprüfung zu fordernden Kompetenzen basieren auf einem Mathematikunterricht, der den dargestellten fachlichen und methodischen Anforderungen genügt. Das bedeutet insbesondere, dass neben der Beherrschung von Begriffen und Verfahren auch das Verständnis dafür, wie man zu zentralen Aussagen gelangt, an Bedeutung gewinnt. In gleicher Weise kommt es auch auf das Beschreiben und Begründen von Problemlösungen an. Um diese Kompetenzen im erforderlichen Umfang und nachhaltig sicherzustellen, müssen die Aufgabenstellungen in der Prüfung auch vernetzte Problemfelder ansprechen und Möglichkeiten bieten, Zusammenhänge zu entdecken und vielfältige Lösungswege zu gehen, kurz, sie müssen offener werden."

Wie Aufgaben offener werden können und wie man solche durch Variation herkömmlicher Aufgaben gewinnen kann, soll ein Ziel dieser PZ-Information sein. Ein Zweites ist es, auf die häufig wiederkehrenden Probleme oder Mängel bei eingereichten Aufgaben hinzuweisen und diese künftig vermeiden zu helfen.

---

[1] http://www.gymnasium.bildung-rp.de (Rechtsgrundlagen) bzw.
http://gymnasium.bildung-rp.de/rechtsgrundlagen.html

[2] Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) Mathematik Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i. d. F. vom 24.05.2002
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1989/1989_12_01-EPA-Mathe.pdf
Die Angabe der Seitenzahlen bezieht sich auf die Druckversion, Luchterhand-Verlag, Wolters Kluwer, München 2003 und ist gegenüber der Internetfassung um ca. 7 größer.

2 Formale Grundlagen

Folgende Quellen bilden die verbindliche Grundlage für die Abiturprüfung:

I. Abiturprüfungsordnung vom 14. Juli 1999
II. Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) Mathematik (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i. d. F. vom 24.05.2002)
III. Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung vom 30.05.2008, Bezug: Abiturprüfungsordnung vom 14.07.1999 zuletzt geändert am 12.01.2006 (GVBl S. 25)
IV. Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach, Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung, Rheinland-Pfalz, 1998

Während die Abiturprüfungsordnung den formalen und organisatorischen Rahmen bildet, ist es ein Anliegen der EPA, ähnlich wie das der Bildungsstandards, bundeseinheitliche Maßstäbe festzulegen. Das Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung passt dies jährlich in aktualisierter Form an die Belange von Rheinland-Pfalz an. Im Folgenden sollen einige dieser Aspekte, sofern sie für das Erstellen von Abituraufgaben von Bedeutung sind, auf Grund der Erfahrungen aus der Auswahlkommission konkretisiert werden.

2.1 Berücksichtigung der Sachgebiete

Die vier eingereichten Aufgaben müssen alle drei Sachgebiete (Analysis, Lineare Algebra/ Analytische Geometrie und Stochastik) abdecken. Dabei können Sachgebiete in einem Aufgabenvorschlag kombiniert werden. Bei den ausgewählten Aufgaben soll sich mindestens ein Drittel auf Analysis beziehen. Dabei ist zu beachten:

- Behandeln zwei Aufgaben das gleiche Sachgebiet, so sollen sie sich deutlich genug voneinander unterscheiden, um bei der Auswahl eine echte Alternative darzustellen.
- Enthalten mehrere Aufgabenvorschläge Analysisanteile, so ist darauf zu achten, dass eine Auswahlmöglichkeit bleibt. Diese wäre nicht gegeben, wenn es drei Aufgaben mit etwa je einem Drittel Analysis gäbe, wogegen die 4. Aufgabe keinen Analysisaufgabenteil enthält.
- Sachgebiete sollen in einem Vorschlag nur kombiniert werden, wenn dadurch Vernetzungen hergestellt werden können. An eine zusammenhanglose Ergänzung von Teilaufgaben aus anderen Sachgebieten ist nicht gedacht.
- Um ein Sachgebiet abzudecken reicht es nicht aus, wenn dieses nur in einer Teilaufgabe vorkommt. Es sollte auf jeden Fall den größeren Teil eines Aufgabenvorschlages ausmachen.

2.2 Erstellen der Aufgabenvorschläge

Es sollten folgende Aspekte beachtet werden:

- Sind die Aufgabenvorschläge gegliedert, müssen die Teilaufgaben in einem inneren Zusammenhang stehen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Arbeitsaufträge nicht zu kleinschrittig formuliert sind, sondern dass sie eigenständige, begründete Lösungswege ermöglichen.
- Zwischenergebnisse sollen nur dann angegeben werden, wenn sie für den weiteren Verlauf der Aufgabe unbedingt erforderlich sind.
- Bei der Zuordnung zu den Anforderungsbereichen ist es sinnvoll, die jeweils für eine Teilaufgabe vorgesehenen Rohpunkte den Anforderungsbereichen zuzuordnen. Hier ist die in den EPA verwendete tabellarische Anordnung von Lösungsskizze und Punktezuordnung sehr übersichtlich.
- Die Lösungsskizze sollte nicht nur Endergebnisse, sondern auch wesentliche Teilschritte enthalten. Zu empfehlen ist hier eine vollständige Musterlösung.
- Alle Materialien, die explizit auf das Abitur vorbereiten und für die Schülerinnen und Schüler im Handel erhältlich sind, dürfen nicht als Abiturvorschläge verwendet werden. Dies gilt auch für Aufgabensammlungen und damit verbundene Erwartungshorizonte, die als Druckveröffentlichung vorliegen.

2.3 Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfachanforderungen

Während in Bundesländern mit zwei Leistungsfächern die Grundfachanforderungen für Schülerinnen und Schüler gelten, die tatsächlich einen Grundkurs besucht haben, betreffen sie in Rheinland-Pfalz Lernende, die denselben Unterricht erlebt haben wie diejenigen, die nicht abgestuft haben. Grundsätzlich aber gilt:

- Da die Schülerinnen und Schüler denselben Unterricht erlebt haben, sind identische Aufgabenteile auch denselben Anforderungsbereichen zuzuordnen.
- Findet die Differenzierung nur durch Weglassen von Aufgabenteilen statt, besteht die Gefahr, dass die verbleibenden Aufgabenteile in Umfang und Anforderungsniveau nicht mehr den Vorgaben entsprechen. Deshalb ist die Differenzierung durch eine veränderte Aufgabenstellung (s. Abschnitt 4.2) sehr zu empfehlen.

3 Konsequenter Aufbau mathematischer Kompetenzen in der MSS

„Es kann nur geprüft werden, was auch behandelt wurde.“ Diese einfache Wahrheit bezieht sich sowohl auf Inhalte als auch auf Methoden. Daher ist es wichtig, sich spätestens zu Beginn der Hauptphase mit den Anforderungen der Abiturprüfung zu beschäftigen.

Auch die Vorschriften über die dem Abitur zugrunde liegenden Themen machen eine langfristige Planung notwendig: „Die Aufgaben für die schriftliche Prüfung müssen aus den Sachgebieten der Lehrpläne ausgewählt werden, die in der Qualifikationsphase (Halbjahre 11/2, 12/1, 12/2 und Jahrgangsstufe 13) behandelt wurden, wobei mindestens die Jahrgangsstufe 13 und eines der Halbjahre 11/2, 12/1, 12/2 zu berücksichtigen sind.“[3] In den EPA ist darüber hinaus festgelegt, dass alle drei Sachgebiete (Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik) für die Abiturprüfung zur Verfügung stehen.

Es empfiehlt sich spätestens mit dem Halbjahr 11/2 beim Erstellen oder Auswählen von Übungs- oder Kursarbeitsaufgaben immer auch schon die Abiturprüfung im Auge zu behalten. Einerseits sollten hier schon die Anforderungen berücksichtigt werden, die später auch an die Abituraufgaben gestellt werden (s. Abschnitt 4.1), andererseits können dabei erstellte, aber nicht verwendete Aufgaben bzw. Ideen als Bausteine für die späteren Abituraufgaben zurückgelegt werden.

So sollte etwa in der Analysis von Anfang an nicht nur darauf geachtet werden, dass z. B. die „Untersuchung von Funktionen an besonderen Stellen auch qualitativ durchgeführt werden kann“, sondern dass man aus solchen Untersuchungen auch Schlüsse ziehen kann z. B. über den Verlauf des Graphen oder sein Krümmungsverhalten.

Die geforderten fachlichen und methodischen Kompetenzen[4] werden im Unterricht zusammen mit entsprechenden Aufgaben geübt und nach und nach gefestigt. Dazu müssen im Unterricht Lösungswege, Begründungen, Darstellungen und Zusammenhänge bei Aufgaben thematisiert werden. Der Unterschied zwischen einer Skizze und einer Zeichnung, die Erwartungen bei dem Arbeitsauftrag „erläutern Sie Ihr Vorgehen“ bzw. „begründen Sie Ihr Vorgehen“ müssen mit Schülerinnen und Schülern ebenso gemeinsam erarbeitet werden wie die Lage von Geraden und Ebenen im Raum.

Die Maßgabe der EPA, dass sich die Aufgaben hauptsächlich im Anforderungsbereich II bewegen sollen, zeigen, dass die Prüfungsaufgaben über die Routine hinaus Aufschluss über das Verständnis der zu lösenden Probleme geben sollen. Das wird bei den üblichen Kurvendiskussionen[5] und kalkülorientierten Aufgaben, die hier dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden, nicht immer sichtbar. Offenere Fragestellungen führen in der Regel über formales Anwenden von Begriffen und Verfahren hinaus und damit zu einer Zuordnung zu den Anforderungsbereichen II oder III.

---

[3] Rundschreiben zur Abiturprüfung Abschnitt 1.2

[4] EPA a. a. O., S. 12

[5] Der Begriff „Kurvendiskussion“ hat sich eingebürgert und soll hier beibehalten werden, obwohl dabei nur eine ganz spezielle Klasse von Kurven betrachtet und auch kaum diskutiert wird. Zutreffender wäre eigentlich „Funktionsuntersuchung“.

Damit Schülerinnen und Schüler in der Abiturarbeit solche Probleme selbstständig bearbeiten und lösen können, müssen sie durch den vorangehenden Unterricht hinreichend vorbereitet werden.

Da die traditionellen Aufgabensammlungen in diesem Bereich wenig Hilfe bieten, ist zu empfehlen, dass die Kolleginnen und Kollegen der Parallelkurse insbesondere bei der Erstellung von Aufgaben und Arbeitsmaterialien von Beginn an zusammenarbeiten. Das erleichtert auch das spätere Erstellen gemeinsamer Abituraufgabenvorschläge, was ausdrücklich erwünscht ist.[6]

4 Entwicklung einer Aufgabenkultur

„Im mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld sollen Verständnis für den Vorgang der Abstraktion, Fähigkeit zu logischem Schließen, Sicherheit in einfachen Kalkülen, Einsicht in die Mathematisierung von Sachverhalten, in die Besonderheiten naturwissenschaftlicher Methoden, in die Entwicklung von Modellvorstellungen und deren Anwendung auf die belebte und unbelebte Natur und in die Funktion naturwissenschaftlicher Theorien vermittelt werden.“[7]

Dieses Ziel gibt die KMK für den mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Unterricht in der Sekundarstufe II vor. Um das zu konkretisieren wird für das Fach Mathematik in den EPA ein Spektrum fachlicher und methodischer Kompetenzen aufgeführt, die es in geeigneten Aufgaben zu überprüfen gilt.

Die in dieser Handreichung beschriebenen Anregungen beziehen sich auf ***Aufgaben zum Leisten***, daneben gibt es in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht natürlich auch ***Aufgaben zum Lernen***, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.[8]

4.1 Aufgabenanalyse und Kompetenzorientierung

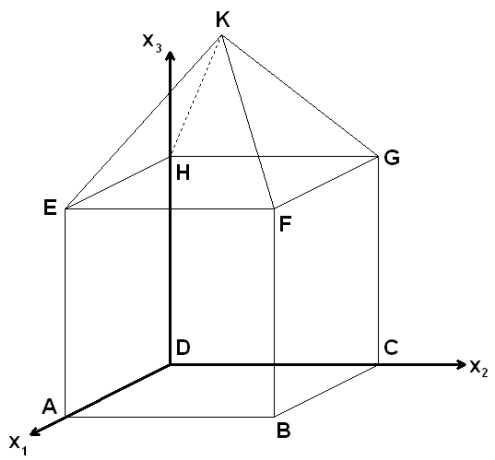
Die folgende Aufgabe ist typisch für eine ganze Klasse von Abituraufgaben aus dem Bereich Analytische Geometrie. Zunächst wird überprüft, inwieweit die Forderung

> *„Die Anforderungen für die schriftliche und mündliche Prüfung sowie für alternative Prüfungskomponenten sind so zu gestalten, dass ein möglichst breites Spektrum von Kompetenzen an geeigneten Inhalten überprüft werden kann.“* [9]

erfüllt ist. Anschließend wird gezeigt, wie das vorhandene Kompetenzspektrum verbreitert werden kann.

---

[6] Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung
[7] EPA , a.a.0. Fachpräambel, Seite 10 (oder 3)
[8] Büchter, A., Leuders, T.: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Lernen fördern - Leistung überprüfen; Cornelsen Scriptor 2005
[9] EPA , a.a.0. Festlegungen für die Gestaltung der Abiturprüfung, Seite 12 (oder 4)



Aufgabenstellung

Ein Haus hat die Form eines Würfels, auf den eine senkrechte Pyramide als Dach gesetzt wurde. Die Maße werden definiert durch die Punkte D(0|0|0), F(10|10|10) und K(5|5|16). (1 LE $\hat{=}$ 1m)

a) Geben Sie eine Ebene in Koordinatenform an, die die Punkte E, F und K enthält.

b) Berechnen Sie die Dachneigung (Winkel zwischen Dachfläche und einer horizontalen Ebene).

c) Berechnen Sie die Länge der Dachkante $\overline{EK}$ sowie deren Winkel zum Dachfußboden EFGH.

d) Vom Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$ wird ein Stahlseil so zur Dachfläche FGK gespannt, dass es dort senkrecht auftrifft. Berechnen Sie die Länge des Stahlseils.

e) Vom Schwerpunkt der Dachfläche EFK soll eine Metallhülse bis zum Dachfußboden als Halterung für einen Fahnenmast eingebaut werden. Welche Länge muss die Hülse haben?

f) In die Hülse wird ein 3 m langer Mast gesteckt, d. h., die Mastspitze befindet sich 3 m über dem Dachfußboden. Die Haustüre befindet sich in der Mitte der Kante $\overline{AB}$. Ein Beobachter mit der Augenhöhe 1,70 m läuft senkrecht zur Kante $\overline{AB}$ auf die Haustürmitte zu. Bis zu welchem Abstand zur Haustüre kann er die Mastspitze sehen?

Analyse

	Kompetenzen[10]	Auf.	Kommentar
K1	angemessenes Verwenden mathematischer Fachsprache	---	Da außer einem Antwortsatz keine umfangreichere sprachliche Darstellung gefordert ist, beschränkt sich die Fachsprache auf die Symbolik.
K2	Veranschaulichen und Beschreiben mathematischer Sachverhalte mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen	---	s. o.
K3	sachgerechtes, flexibles und kritisches Umgehen mit grundlegenden Begriffen, Sätzen, Verfahren und Algorithmen, auch zur Lösung innermathematischer Probleme	b) c)	sachgerecht: ist erfüllt flexibel: b) und c) lassen sich auch elementargeometrisch lösen kritisch: wird hier nicht verlangt

[10] Um einen Bezug herstellen zu können, werden die Kompetenzen hier willkürlich mit K1, ... bezeichnet. vgl. EPA a. a. O., Seite 12 (oder 4), 1.1 Fachliche und methodische Kompetenzen

K4	mathematisches Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme - Beschreiben der Ausgangssituation und der Modellannahme - Mathematisieren - Lösen in dem gewählten Modell - Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext - kritisches Reflektieren der Ergebnisse und der Vorgehensweise	---	Ein Modellieren im eigentlichen Sinne findet nicht statt, da das Modell schon vorgegeben ist. Darüber hinaus wird auch kein wirklich relevantes Realproblem gestellt, so dass die Aufgabe auch rein innermathematisch (Würfel und Pyramide) hätte formuliert werden können.
K5	Beherrschen grundlegender Vorgehensweisen zur Gewinnung, Darstellung und Sicherung mathematischer Erkenntnisse, insbesondere - Konkretisieren mathematischer Aussagen an Beispielen - Nutzen heuristischer Strategien und Verfahren - Argumentieren und Begründen bei mathematischen Sachverhalten - Erläutern von Regeln und Verfahren - Beweisen von mathematischen Sätzen unter Verwendung der jeweils geeigneten Beweisverfahren - lokales Ordnen mathematischer Sätze, Erkennen von Analogien, Verallgemeinern, Spezialisieren	--- f) --- --- --- ---	Heuristische Strategien können individuell immer eingesetzt werden.
K6	Verfügen über eine sichere Raumanschauung	e), f)	
K7	Verknüpfen von Inhalten aus verschiedenen mathematischen Themenbereichen		ist nicht vorhanden
K8	selbstständiges Auswählen, Nutzen und Bewerten von Informationen - Erschließen von Informationsquellen - heuristisches und systematisches Bearbeiten von Problemen - sorgfältiges Dokumentieren der Arbeitsschritte - verständliches und übersichtliches Präsentieren der Ergebnisse - kritisches Reflektieren des eigenen Handelns		Hier handelt es sich um allgemeine Kompetenzen, die nicht von einer speziellen Aufgabenstellung abhängen. Bei der Bewertung ist ein gutes Augenmaß gefragt.
K9	sachangemessenes Nutzen von Hilfsmitteln wie zum Beispiel Tafelwerke, Taschenrechner, Computersoftware, Internet		Hier ist vor allem der TR gefragt, evtl. auch Formelsammlung

Auf Grund dieser Analyse kann man kaum von einem breiten Spektrum von Kompetenzen sprechen, die benötigt werden.

Im Folgenden werden Anregungen gegeben, wie man durch Verändern oder Ergänzen mehr Kompetenzen erfassen kann.

(K1) Angemessenes Verwenden mathematischer Fachsprache

Dazu ist Textproduktion nötig, die man durch Aufgabenstellungen zum Argumentieren und Begründen erreichen kann.

Begründen Sie, dass es möglich ist, eine Kugel so in dem Pyramidendach unterzubringen, dass sie die vier Dachflächen und den Dachboden berührt.

Beschreiben Sie (ohne Rechnung), wie Sie vorgehen würden, um den Mittelpunkt und das Volumen dieser Kugel zu bestimmen.

(K2) Veranschaulichen und Beschreiben mathematischer Sachverhalte mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen

Stellen Sie die Ebene (FGK) geeignet in einem Koordinatensystem dar.

(K3) Sachgerechtes, flexibles und kritisches Umgehen mit grundlegenden Begriffen, Sätzen, Verfahren und Algorithmen, auch zur Lösung innermathematischer Probleme

Nennen Sie drei Darstellungsformen von Ebenen und geben Sie jeweils ein Beispiel an. Beschreiben Sie, für welche Problemfelder die einzelnen Darstellungen besonders geeignet sind und begründen Sie Ihre Meinung.

oder

Die Höhe der Pyramide wird auf 4 verkleinert. Aufgabe d) wird abgewandelt zu:

Überprüfen Sie, ob man ein Seil vom Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$ senkrecht zur gegenüberliegenden Dachfläche spannen kann.

(K4) Mathematisches Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme

Das Haus könnte koordinatenfrei beschrieben werden.

Ein Haus hat die Form eines Würfels mit der Kantenlänge 10 m. Darauf wird eine senkrechte Pyramide mit der Höhe 6 m als Dach gesetzt.

Bem.: Aufgabe a) könnte dann so nicht mehr gestellt werden.

(K5) Konkretisieren mathematischer Aussagen an Beispielen

„Vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, bilden ein räumliches Viereck. Die Seitenmitten dieses Vierecks bilden ein Parallelogramm."

Erläutern Sie diese Situation an einem selbstgewählten nichtebenen Viereck und weisen Sie die Behauptung für Ihr Beispiel nach.

(K7) Gebietsübergreifend

In die Pyramide soll ein Quader mit möglichst großem Volumen eingebaut werden.

(K8) Erläutern von Regeln und Verfahren

Erläutern und begründen Sie anhand einer geeigneten Skizze die Verwendung der Hesseschen Normalenform zur Abstandsbestimmung.

4.2 Differenzierung in Grund- und Leistungsfachanforderungen

Anforderungen eines echten Grundfachabiturs, wie es in Bundesländern mit nur zwei Leistungsfächern stattfindet, lassen sich nicht ohne Weiteres auf ein abgestuftes Leistungsfach übertragen, da hier ein anderer Unterricht vorausgegangen ist. Trotzdem geben die in den EPA genannten Merkmale für Grund- bzw. Leistungsfächer eine Orientierung, wie sich Aufgaben für die beiden Bereiche unterscheiden können.[11]

> **Grundkurse** im Fach Mathematik führen in grundlegende Sachverhalte, Probleme und Zusammenhänge ein, verdeutlichen die Differenz zwischen Alltagswissen und wissenschaftlich begründetem Wissen. Sie zielen mit Bezug auf Anwendungen auf die Beherrschung wesentlicher Arbeitsmethoden und die exemplarische Erkenntnis fachübergreifender Zusammenhänge.
>
> **Leistungskurse** im Fach Mathematik befassen sich methodisch ausgewiesener und systematischer mit wesentlichen, die Breite, die Komplexität und den Aspektreichtum des Faches verdeutlichenden Inhalten, Theorien und Modellen. Sie sind gerichtet auf vertiefte Beherrschung der fachlichen Methoden, ihre selbstständige Anwendung, Übertragung und theoretische Reflexion.

Die Anforderungen im Grundfach sollen sich daher nicht nur quantitativ, sondern vor allem auch qualitativ von denen im Leistungsfach unterscheiden.
Grund- und Leistungsfach unterscheiden sich insbesondere durch[12]

(D1) den Grad der Vorstrukturierung,
(D2) den Schwierigkeitsgrad,
(D3) den Komplexitätsgrad,
(D4) die Offenheit der Aufgabenstellung,
(D5) die Anforderungen an Selbstständigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben,
(D6) den Umfang und die Art der bereitgestellten Hilfsmittel und Informationen.

Ein ausschließliches Differenzieren durch Weglassen von Aufgabenteilen wird diesen Anforderungen nicht gerecht. Die folgende Aufgabe zeigt, wie eine Differenzierung durch Veränderung der Aufgabenstellung unter Verwendung der o. g. Optionen möglich ist. Darüber hinaus wird auch das Kompetenzspektrum betrachtet.

[11] Vgl. EPA, Seite 9, Abschnitt 1.4 Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfach
[12] Um einen Bezug herstellen zu können, werden die Optionen hier willkürlich mit D1, ... bezeichnet.

Aufgabenstellung[13]

Gegeben ist die lineare Abbildung $\vec{y} = A\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Bild des Punktes P(2|5) sowie das Bild der Geraden g : y = 2x + 1 und stellen Sie P, P', g und g' in einem Koordinatensystem dar.

b) Untersuchen Sie A auf Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) Erläutern Sie allgemein die geometrische Bedeutung von Eigenvektoren zum Eigenwert 1 an einer von Ihnen gewählten konkreten Kongruenzabbildung.

d) **GF:** Zeigen Sie, dass jede Gerade h durch ein Urbild-Bildpaar h = PP' mit $P \neq P'$ eine Parallele zur x-Achse ist.

LF: Untersuchen Sie die Lage der Geraden PP', wobei $P' \neq P$ das Bild von P unter A ist. Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

e) **GF:** Zeigen Sie, dass die Gerade g aus Aufgabe a) nicht orthogonal zu ihrer Bildgeraden ist.

LF: Zeigen Sie, dass es keine Gerade gibt, die zu ihrem Bild orthogonal ist.

f) **GF:** Überprüfen Sie, ob das Bild des Einheitskreises um den Ursprung wieder ein Kreis ist. Stellen Sie Ihre Überlegungen ausführlich dar.

LF: Unter allen Winkeln, die zwischen Geraden und ihren Bildgeraden vorkommen können, gibt es einen maximalen Winkel α_{max}<90°. Skizzieren Sie einen Weg (ohne Rechnung), wie man α_{max} bestimmen kann.

g) **GF:** Die lineare Abbildung A wird erweitert zur affinen Abbildung $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die affine Abbildung auf Fixpunkte.

LF: Die lineare Abbildung A wird erweitert zur affinen Abbildung $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{u}$.

Zeigen Sie, dass diese genau dann Fixpunkte besitzt, wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall die Menge der Fixpunkte in Abhängigkeit von c.

Die Abbildungsmatrix A wird nun erweitert zu der 3 x 3-Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

h) Berechnen Sie die Eigenwerte der Abbildung und untersuchen Sie diese auf Fixpunkte. *[Zur Kontrolle: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$]*

Bestimmen Sie die Eigenvektoren zum Eigenwert –1 und deuten Sie diese geometrisch. Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung B auf diese Punkte.

i) Stellen Sie Bild und Kern der Abbildung B algebraisch dar und interpretieren Sie die beiden Mengen und ihre Bedeutung geometrisch.

[13] Wegen der besseren Vergleichbarkeit sind hier die Aufgaben für Grund- und Leistungsfach nebeneinander gestellt. In der Prüfung erhalten die Schülerinnen und Schüler getrennte Aufgabenblätter.

Analyse

a) *Die Schülerinnen und Schüler machen sich mit der Abbildung vertraut und können schon erkennen, dass die y-Koordinate nicht verändert wird (s. Teil d)). Hier sind nur Standardtechniken nötig (K3), u. a. die Veranschaulichung eines Sachverhaltes durch ein Bild (im Koordinatensystem) (K2).*

b) *wie a) allerdings mit höherem Schwierigkeitsgrad (K3)*

c) *Hier muss ein mathematischer Sachverhalt beschrieben und veranschaulicht werden (K2). Dazu muss durch ein Beispiel konkretisiert werden (K5).*

d) ***GF:** Hier muss ein einfacher Sachverhalt nachgewiesen werden (K5).*

   ***LF:** Zusätzlich muss hier erst ein Sachverhalt entdeckt und formuliert werden (K8).*

   Die Differenzierung besteht im Wesentlichen im Grad der Vorstrukturierung (D1) bzw. durch den Umfang der bereitgestellten Information (D6).

e) ***GF:** Hier ist ein sicherer Umgang mit mathematischen Grundfertigkeiten notwendig (K3).*

   ***LF:** Zusätzlich ist hier ein Spezialisieren durch Reduktion auf den Richtungsvektor notwendig (K5).*

   Die Differenzierung wird durch den Grad der Allgemeinheit erreicht (D3).

f) ***GF:** Es sind Heuristik und Argumentieren (K5) in Verbindung mit Textproduktion (K2) und sorgfältiger Dokumentation (K8) gefragt.*

   ***LF:** Hier muss ein Verfahren erläutert werden (K5). Dazu ist Modellbildung durch Parametrisierung der Geraden nötig (K4).*

   Die Differenzierung geschieht durch höhere Selbstständigkeit (D4) und einen höheren Schwierigkeitsgrad (D2).

g) ***GF/LF:** Es muss ein mathematischer Sachverhalt untersucht werden (K5).*

   Die Differenzierung wird durch den Grad der Allgemeinheit erreicht (D3).

h) *Neben Grundtechniken (K3) ist hier Veranschaulichen (K2) und geometrische Anschauung (K6) gefragt.*

i) *wie* h)

5 Aufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgaben bzw. Aufgabenteile zeigen, wie man das Kompetenzspektrum verbreitern und eine sinnvolle Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfachanforderungen schaffen kann.

5.1 Analysis

5.1.1 Beispiel e-Funktion

Analysisaufgabe - Traditionelle Version

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{a}}; \quad x \geq 0;\ a > 0$.

Der Graph von $f_a(x)$ sei K_a.-

a) Untersuchen Sie K_a auf Extrem- und Wendepunkte sowie Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion, auf deren Graph die Hochpunkte der K_a liegen.

c) Untersuchen Sie das Verhalten der K_a für $x \to \infty$.

d) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen $K_{0,5}$ in ein Koordinatensystem.

(Maßstab: x-Achse 1LE $\hat{=}$ 1 cm, y-Achse 1LE $\hat{=}$ 2 cm)

e) Ein Rechteck hat die Eckpunkte A(0|0), B(t|0), C(t|f_1(t)) und D(0|f_1(t)) mit t>0. Bestimmen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt, den dieses Rechteck annehmen kann.

f) K_a, die x-Achse und die Gerade x = u begrenzen vollständig eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von u und a. Untersuchen Sie den Flächeninhalt für $u \to \infty$.

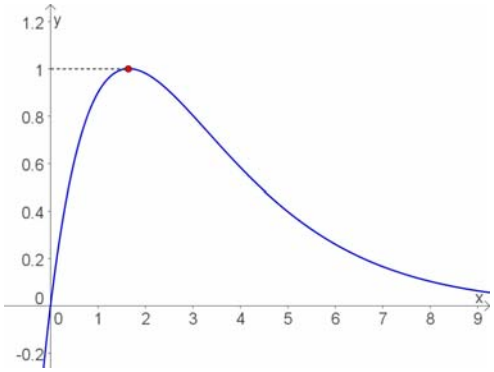
g) Berechnen Sie das Volumen V_w des Rotationskörpers der entsteht, wenn der Graph K_1 im Intervall [0;w] um die x-Achse rotiert. Untersuchen Sie den Fall $w \to \infty$.

Analyse

Diese Aufgabe enthält neben der gewohnten Kurvendiskussion (Teile a) bis d)) mit Teil e) noch eine Extremwertaufgabe, mit f) ein uneigentliches Integral und mit g) ein Rotationsvolumen. Sie erfüllt formal die Kriterien des Beiblattes,[14] dass sie „nicht nur eine Kurvendiskussion“ enthält. Dennoch sind auch diese Aufgabenteile hauptsächlich kalkülorientiert und fordern zu wenig Begründungen und das Aufzeigen von Zusammenhängen. Bei den Teilen f) und g) werden jeweils partielle Integration und Grenzwertbildung verlangt, es würde einer der beiden Aufgabenteile genügen, um diese Techniken zu prüfen. Insgesamt handelt es sich um eine geschlossene Aufgabe, bei der man von einer bekannten Situation aus auf einem im Wesentlichen eindeutig bestimmten Weg zu einer eindeutigen Lösung kommt. Im Folgenden sollen Optionen gezeigt werden, wie sich einzelne Teile dieser Aufgabe öffnen lassen.

[14] Siehe Checkliste zur Überprüfung der Aufgabenvorschläge im Hinblick auf formale Vorgaben, die bei dem Einreichen der Abituraufgaben mit ausgefüllt werden muss. (Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung: „Die Aufgabenvorschläge zur Analysis umfassen mehr als eine reine Kurvendiskussion.“ Fassung vom 30.05.2008, Seite 84)

a) Das Bild zeigt einen der Graphen K_a. Bestimmen Sie einen passenden Wert des Parameters a.



Hier geht es darum, die Koordinaten eines allgemeinen Hochpunktes H_a zu bestimmen und dann die Gleichung $f_a(x_H) = 1$ nach a aufzulösen. Das sind alles elementare Werkzeuge aus dem Werkzeugkasten „Kurvendiskussion", aber nicht in der rezeptartigen Form „untersuche auf Extrempunkte...". Die Bedingung $f_a'(x_H) = 0$ ist zusammen mit der Skizze hinreichend für einen Hochpunkt.

b) Weisen Sie nach, dass K_a genau einen Wendepunkt besitzt und prüfen Sie, ob es ein a gibt, so dass die Winkelhalbierende des ersten Quadranten den Graph K_a in seinem Wendepunkt schneidet.

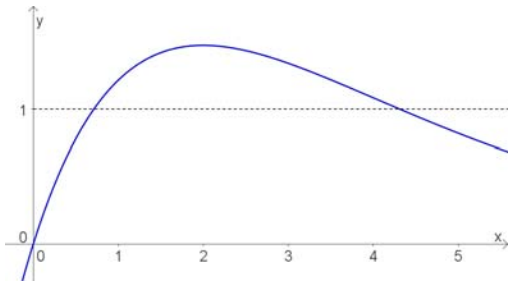
Ähnlich wie bei a) wird hier die Wendepunktberechnung in einen anderen Kontext gesetzt.

c) Variante (1): Begründen Sie, dass die Gleichung $x \cdot e^{-x} = 1$ keine Lösung besitzt.

Variante (2): Begründen Sie, dass die Gleichung $2x \cdot e^{-x/2} = 1$ zwei Lösungen besitzt.

Da sich diese Gleichungen nicht elementar nach x auflösen lassen, müssen die Schülerinnen und Schüler hier mathematisch argumentieren.

d) [Nicht in Kombination mit c)(2)]



Das Bild zeigt den Graphen K_2. Offensichtlich besitzt die Gleichung $f_2(x) = 1$ zwei Lösungen, die allerdings nicht durch einfaches Umformen bestimmt werden können.

(i) Erläutern Sie anhand einer passenden Skizze die (geometrische) Idee des Newton-Verfahrens.

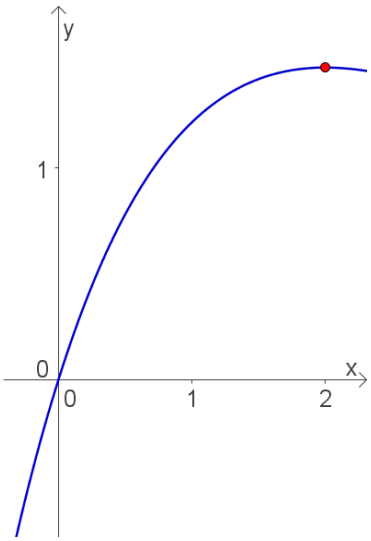
Leiten Sie die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \dfrac{e^{\frac{x_n}{2}} - x_n^2}{2 - x_n}$ her und bestimmen Sie in zwei Schritten eine Näherung für die kleinere der beiden Lösungen.

(ii) Die Näherungsvorschrift ist für $x_n = 2$ nicht definiert. Interpretieren Sie diesen Fall geometrisch.

Hier wird ein Iterationsverfahren verlangt. Eine solche Aufgabe kann natürlich nur gestellt werden, wenn Näherungsverfahren, insbesondere das Newton-Verfahren, vertieft behandelt wurden. Andernfalls bietet sich die Alternative an, das Verfahren verbal zu beschreiben und dann die Rechnung herleiten zu lassen.

e) Das Bild zeigt den Graphen K_2. Im Bereich zwischen dem Ursprung und dem Hochpunkt soll der Graph durch eine quadratische Parabel approximiert werden. Bestimmen Sie die Gleichung einer möglichen Parabel und berechnen Sie die mittlere Abweichung in diesem Bereich.

<u>Hinweis:</u> Die mittlere Abweichung soll das Vorzeichen berücksichtigen, d. h., Abweichungen in unterschiedliche Richtungen können sich ausgleichen.



Der erste Teil stellt eine offene „Steckbriefaufgabe“ dar, während der zweite Teil die Kenntnis der Mittelwertbildung mit Hilfe von Integralen verlangt.

f) Die Funktion $f_{10}(x)$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Autos in m/s in Abhängigkeit von der Zeit x in s.

(i) Welche Bedeutung hat die Fläche unter der Kurve im Intervall [0;10]?

(ii) Welche Bedeutung hat der Wendepunkt?

(iii) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos in den ersten 10 Sekunden.

Hier geht es um Interpretieren bzw. Modellieren. In (iii) ist wieder eine Mittelwertbildung mit Hilfe des Integrals nötig. Die Wahl der Anwendung hängt natürlich von den behandelten Beispielen ab.

g) Nach einem Regenguss kann der Abfluss durch einen Kanal mit Hilfe der Funktion $g(x) = f_{0,5}(x) = 0{,}5x \cdot e^{-2x}$ beschrieben werden. (x Zeit in Stunden, g(x) Durchfluss in Kubikmetern pro Stunde).

(i) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} g(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis in dem beschriebenen Sachzusammenhang.

(ii) Skizzieren Sie in das Koordinatensystem den Verlauf von g'(x). Erläutern Sie den Zusammenhang von g(x) und g'(x) unter Berücksichtigung besonderer Punkte.

Ähnliche Variante wie bei f). Hier geht es aber zusätzlich um das graphische Ableiten und das Erläutern der notwendigen Kriterien für Hoch- und Wendepunkte sowie der Monotoniebereiche. Die Berechnung des uneigentlichen Integrals ist hingegen eine Standardanwendung.

h) Die Abbildung zeigt die Berechnung der zweiten bis fünften Ableitung von $f_a(x)$ mit Hilfe eines CAS.

(i) Finden Sie eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung $f_a^{(n)}(x)$ und überprüfen Sie diese auch für die Fälle n = 1 und n = 0.

(ii) Beweisen Sie ihre Formel.

(iii) Alternative (ohne vollst. Induktion):

Bilden Sie mit Hilfe geeigneter Ableitungsregeln die Ableitung von $f_a^{(n)}(x)$. Vergleichen Sie Ihre Berechnung mit dem Ergebnis der Formel für $f_a^{(n+1)}(x)$.

$\frac{d^2}{dx^2}(fa(x))$	$\frac{(x-2\cdot a)\cdot e^{\frac{-x}{a}}}{a}$
$\frac{d^3}{dx^3}(fa(x))$	$\frac{-(x-3\cdot a)\cdot e^{\frac{-x}{a}}}{a^2}$
$\frac{d^4}{dx^4}(fa(x))$	$\frac{(x-4\cdot a)\cdot e^{\frac{-x}{a}}}{a^3}$
$\frac{d^5}{dx^5}(fa(x))$	$\frac{-(x-5\cdot a)\cdot e^{\frac{-x}{a}}}{a^4}$

Hier müssen die Schülerinnen und Schüler etwas entdecken und in die mathematische Symbolsprache übersetzen. Der anschließende Beweis erfordert vollständige Induktion bzw. als Alternative nur den Induktionsschritt.

Lösungen

a) Der Hochpunkt liegt bei $H_a(a\,|\,\frac{a^2}{e})$, also $a=\sqrt{e}$.

b) $f_a''(x)=(\frac{x}{a}-2)\cdot e^{-\frac{x}{a}}$ mit der einzigen Nullstelle bei x = 2a. f'''(2a) = $f_a'''(x)=\frac{1}{a\cdot e^2}\neq 0$. Also gibt es einen Wendepunkt bei $W_a(2a\,|\,2(\frac{a}{e})^2)$. Damit W auf der Winkelhalbierenden y = x liegt, muss gelten: $2a=2(\frac{a}{e})^2 \Leftrightarrow a=e^2$.

c) (1) 1. Möglichkeit: Im Zusammenhang mit der Funktionenschar lautet die Frage: Hat $f_1(x)=1$ eine Lösung? Wurde vorher allgemein der Hochpunkt berechnet, liegt dieser für K_1 bei $H_1(1|e^{-1})$. Da $e^{-1} < 1$ ist, hat die o. g. Gleichung keine Lösung.

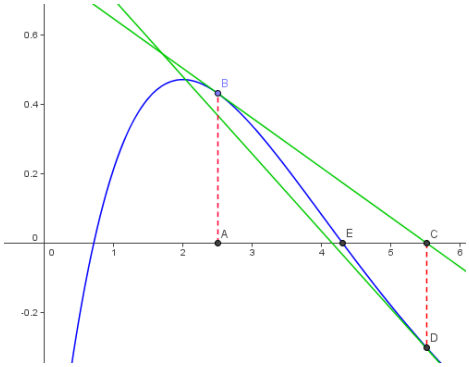
(1) 2. Möglichkeit: Die Gleichung ist äquivalent zu $e^x=x$. Die Differenzfunktion $d(x)= e^x-x$ hat ihr (einziges) Minimum für x = 0 mit d(0) = 1. Also ist $e^x-x\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq x+1 \Leftrightarrow e^x>x$. Also hat die obige Gleichung keine Lösung.

(2) $2x\cdot e^{-x/2} = 1 \Leftrightarrow 2x = e^{x/2}$. Die Aussage lässt sich z. B. durch Berechnen und Vergleichen der Funktionswerte von g(x) = 2x und $h(x) = e^{x/2}$ an den Stellen x = 0, x = 1 und x = 10 und mit der Voraussetzung der Stetigkeit von g und h zeigen.

d) Gesucht sind die Nullstellen von $g(x) = 2x\cdot e^{-x/2}-1$.

(i) Die erste Näherung ist $x_0 = 2{,}5$. In B(2,5| g(2,5)) wird mit der Tangente in B approximiert und die Nullstelle x_1 berechnet. In $D(x_1|\ g(x_1))$ wird wieder die Tangente gebildet, die Nullstelle berechnet usw.

(ii) Tangentenfunktion: $t(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Nullstelle: $x_1 = -f(x_0)/f'(x_0) + x_0$



$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n = \frac{2x_n \cdot e^{-\frac{x_n}{2}} - 1}{(x_n - 2)e^{-\frac{x_n}{2}}} + x_n = \frac{2x_n - e^{\frac{x_n}{2}}}{x_n - 2} + \frac{x_n^2 - 2x_n}{x_n - 2} = \frac{x_n^2 - e^{\frac{x_n}{2}}}{x_n - 2}$$

z. B. $x_0 = 2{,}5$; $x_1 = 5{,}52$; $x_2 = 4{,}17$.

(iii) Mit $x_n=2$ kommt man zum Hochpunkt. Die Tangente verläuft parallel zur x-Achse und hat keine Nullstelle.

d) Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Parabel zu bestimmen. Der einfachste Ansatz nutzt die Symmetrie: $p(x) = k \cdot x \cdot (x-4)$. Wegen $p(2) = 4/e$ folgt $k = -1/e$. Also $p(x) = x \cdot (4 - x) / e$. Die Abweichung wird durch die Differenzfunktion $d(x)=f_2(x)-p(x)$ beschrieben. Für die mittlere Abweichung gilt dann

$$\frac{1}{2}\int_0^2 (2xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{e}x(4-x))dx = \frac{1}{2}\left[-4e^{-\frac{x}{2}}(x+2) + \frac{x^3}{3e} - \frac{2}{e}x^2\right]_0^2 \approx 0{,}076\,.$$

Alternativ können aber auch andere Stützstellen oder die Eigenschaft des Hochpunktes verwendet werden.

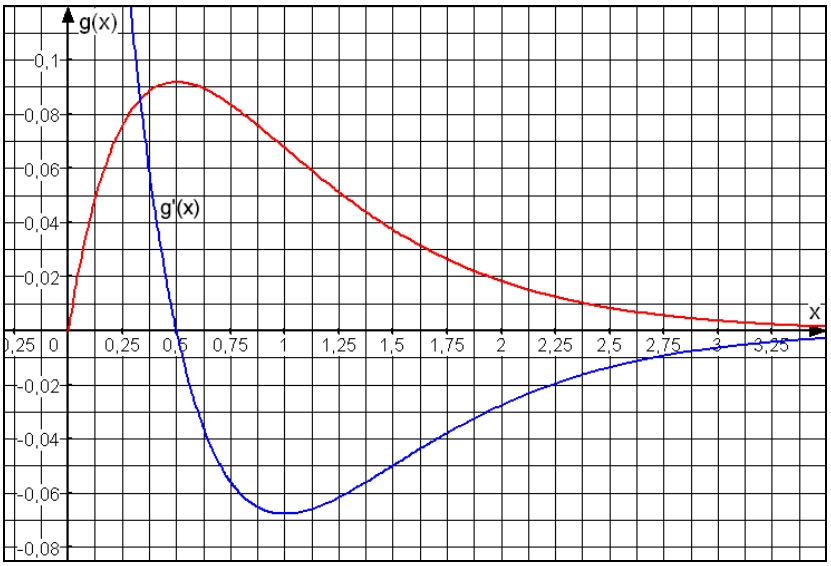
e) (i) Das ist der zurückgelegte Weg.

(ii) Das ist der Punkt der größten (Brems-)beschleunigung.

(iii) $\overline{v} = \frac{1}{10}\int_0^{10} 10x \cdot e^{-\frac{x}{10}}dx \approx 26{,}4$. Die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 10 Sekunden beträgt ca. 24,6m/s.

f) (i) Es ist $\int_0^\infty g(x)dx = \left[-0{,}125e^{-2x}(2x+1)\right]_0^\infty = 0{,}125$. Das bedeutet, dass insgesamt 125 Liter Wasser durch den Abfluss fließen.

(ii)



Bis zur Nullstelle von g'(x) bei $x_0=0{,}5$ nimmt die Durchflussrate zu. Danach nimmt sie ab, am schnellsten beim Minimum von g'(x) bei $x_m = 1$. Im weiteren Verlauf ändert sich die Durchflussrate immer weniger, g'(x) strebt gegen Null.

g) (i) Offenbar gilt $f_a^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(x - n\cdot a)\cdot e^{-\frac{x}{a}}}{a^{n-1}}$;

n = 0: $(-1)^0 \frac{(x - 0\cdot a)\cdot e^{-\frac{x}{a}}}{a^{-1}} = a\cdot x\cdot e^{-\frac{x}{a}} = f_a(x)$

n=1: $(-1)^1 \frac{(x - 1\cdot a)\cdot e^{-\frac{x}{a}}}{a^{1-1}} = (a - x)e^{-\frac{x}{a}} = f_a'(x)$.

(ii) Durch vollständige Induktion:

$$\left[f_a^{(n)}(x)\right]' = \frac{(-1)^n}{a^{n-1}}\cdot\left[(x - n\cdot a)e^{-\frac{x}{a}}\right]' = \frac{(-1)^n}{a^{n-1}}\cdot\left[e^{-\frac{x}{a}} - (x - n\cdot a)\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right]'$$

$$= \frac{(-1)^n}{a\cdot a^{n-1}}\cdot e^{-\frac{x}{a}}(a - x + a\cdot n) = \frac{(-1)^{(n+1)}}{a^{(n+1)-1}}\cdot e^{-\frac{x}{a}}(x - (n+1)\cdot a).$$

5.1.2 Beispiel Rotationsvolumen

Analysisaufgabe – Traditionelle Version

Gegeben ist die Funktion $g: x \to \sqrt{x^3}$ mit $D_g = [0;4]$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g.

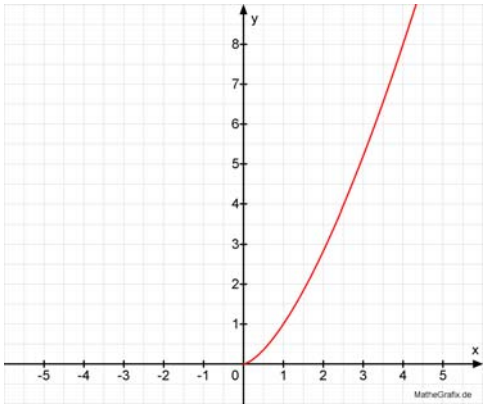
b) Die von der x-Achse, der Geraden $x = 4$ und dem Graphen von g im ersten Quadranten begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

c) Dem Rotationskörper aus b) wird ein zur x-Achse symmetrischer Zylinder einbeschrieben. Welchen Radius und welche Höhe hat der Zylinder mit maximalem Volumen?

Analyse

Die ersten beiden Aufgabenteile verlangen von den Schülerinnen und Schülern Grundkenntnisse über den Verlauf von Potenzfunktionen (hier: Wurzelfunktionen) sowie das Anwenden der Formel zur Berechnung des Rotationsvolumens $V = \int_a^b \pi\cdot(f(x))^2 dx$. *Beide Aufgabenteile sind überwiegend kalkülorientiert und den Anforderungsbereichen I und II zuzuordnen. Lediglich Aufgabenteil c) gehört teilweise in den Anforderungsbereich III. Die beiden Aufgabenteile b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.*

Hier a):



b) Ergebnis V = 64π [VE].

c) $V_{Zy}(r,h) = G\cdot h = \pi\cdot r^2\cdot h$. Mit der Nebenbedingung $r = \sqrt{(4-h)^3}$ erhält man die Zielfunktion:
$V_{Zy}(h) = \pi\cdot(4-h)^3\cdot h$.

Die Extremstellen dieser Funktion findet man als h_1=1 und h_2=4 (entfällt, da hier V = 0);
h_1 = 1 ist Maximumstelle und der dazugehörige Radius beträgt $r_1 = \sqrt{27}$.

Will man testen, ob die Schülerinnen und Schüler das Zustandekommen der Formel $V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$ *verstanden haben, so lässt sich die Aufgabe auf verschiedene Arten und in unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen teilweise bzw. vollständig umformulieren:*

1. Möglichkeit: (für GF und LF)

Voraussetzung ist dabei, dass das Thema Rotationsvolumen im Unterricht <u>*bereits behandelt*</u> *wurde. Es wird nur Teil b) verändert:*

b) Die von der x-Achse, der Geraden $x = 4$ und dem Graphen von f im ersten Quadranten begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Es entsteht ein Körper, dessen Volumen sich nach folgender Formel berechnen lässt: $V = \int_0^4 \pi \cdot (f(x))^2 dx$.

(i) Zeichnen Sie in der Skizze aus a) dieses Volumen ein.

(ii) Erläutern Sie das Zustandekommen dieser Formel.

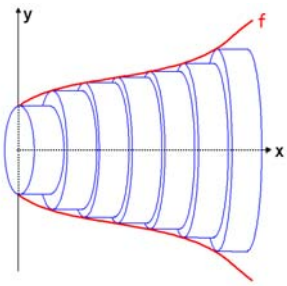
(iii) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Bei den folgenden Möglichkeiten wird davon ausgegangen, dass das Rotationsvolumen im Unterricht noch <u>*nicht behandelt*</u> *wurde. Es wird die gesamte Aufgabe verändert:*

2. Möglichkeit: (für LF)

f sei eine stetige Funktion auf [a;b] und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$.

Rotiert der Graph von *f* um die x-Achse, so entsteht ein Körper, dessen Volumen sich nach folgender Formel berechnen lässt: $V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$



a) Erklären Sie kurz das Zustandekommen dieser Formel und benutzen Sie für Ihre Erläuterungen die Skizze!

b) Überprüfen Sie die Formel am Beispiel einer allgemeinen Ursprungsgeraden $f(x) = m \cdot x$ für $a = 0;\ b = h\ (m > 0;\ h > 0)$!
(Fertigen Sie hierzu eine Skizze an!)

Lösungsskizze

a) Man geht hier analog zur Herleitung des Integrals durch Riemannsche Summen vor. Man unterteilt [a;b] in n gleiche Teile der Breite $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Anschließend approximiert man das Rotationsvolumen durch die Summe der Scheiben (Zylinder) mit der Höhe Δx und dem Radius $f(x_k)$ mit $x_k = a + k\Delta x$ und k = 0, …, n-1.

Eine Scheibe hat das Volumen $\Delta V = \pi(f(x_k))^2 \cdot \Delta x$.

Summiert man alle Scheiben $\sum_{k=0}^{n-1} \pi(f(x_k))^2 \cdot \Delta x$ und bildet den Übergang $\Delta x \to 0$ bzw. $n \to \infty$,

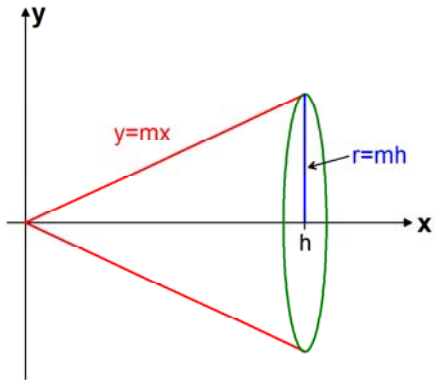
so erhält man $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi(f(x_k))^2 \cdot \Delta x = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$.

b) Der Rotationskörper ist ein Kegel mit Spitze im Ursprung, der Höhe h und dem Radius $f(h) = mh$.

Mit der Ursprungsgeraden y = mx erhält man mit Hilfe der Formel für das Rotationsvolumen:

$$V = \pi \cdot \int_0^h (mx)^2 dx = \frac{1}{3}\pi m^2 h^3 = \frac{1}{3}\pi (mh)^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Dies ist die aus der Sekundarstufe I bekannte Formel für das Kegelvolumen: $V_{Ke} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$.

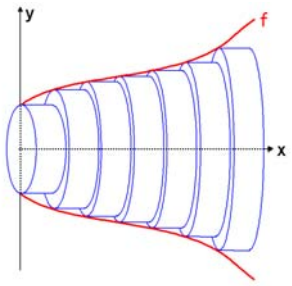


3. Möglichkeit: (für GF)

f sei eine stetige Funktion auf [a;b] und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$.

Rotiert der Graph von f um die x-Achse, so entsteht ein Körper, dessen Volumen sich nach folgender Formel berechnen lässt:

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx.$$



a) Welche Bedeutung hat der Integrand?

b) Welcher Körper entsteht, wenn die Gerade $f(x) = x$ im Bereich [0;4] um die x-Achse rotiert? Berechnen Sie sein Volumen

(i) mit Hilfe der aus der Geometrie bekannten Formel,

(ii) mittels der angegebenen Integralmethode!

Lösungsskizze

a) Der Integrand gibt das Volumen einer Scheibe (eines Zylinders) mit Radius f(x) und Höhe dx an.

b) Es entsteht ein Kegel der Höhe h = 4 und mit dem Radius r = 4. Sein Volumen beträgt $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \approx 67[VE]$.

In diesem Aufgabenteil benötigen die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse über das Kegelvolumen und sollten in der Lage sein die allgemeine Formel aus a) anzuwenden.

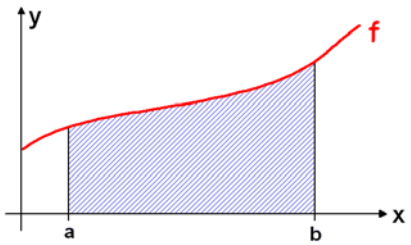
Zur Vereinfachung kann man einige Formeln (u. a. die des Kegelvolumens) angeben (K5).

Bei diesen veränderten Aufgabenteilen müssen die Schülerinnen und Schüler verstärkt begründen und Zusammenhänge aufzeigen, indem sie die Verfahren nicht nur anwenden, sondern auch erläutern[15] (K1, K8).
Eine weitere, noch offenere Aufgabenstellung ergibt sich, wenn die Schülerinnen und Schüler die Formel zur Berechnung des Rotationsvolumens selbst finden sollen, indem sie den Zusammenhang zwischen Randfunktion, Integral und Fläche ins Dreidimensionale übertragen:

4. Möglichkeit: (für LF)

f sei eine stetige Funktion auf [a;b] und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$.

Mittels $F = \int_a^b f(x)dx$ berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen der Randfunktion f, der x-Achse und den Geraden x = a und x = b.



Rotiert der Graph von f zwischen x = a und x = b um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper.

a) Zeichnen Sie diesen Körper in obige Abbildung ein.

b) Schneidet man den Rotationskörper an der Stelle x orthogonal zur x-Achse durch, so entsteht eine Schnittfläche. Erstellen Sie aus der Randfunktion f eine entsprechende „Querschnittsfunktion“ q(x), die den Flächeninhalt der Schnittfläche an der Stelle x angibt. Begründen Sie, dass das Integral $\int_a^b q(x)dx$ das Volumen des Rotationskörpers zwischen a und b beschreibt.

Geben Sie damit eine Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers mit Randfunktion f im Intervall [a; b] an.

c) Weisen Sie die Richtigkeit der von Ihnen gefundenen Formel am Beispiel einer allgemeinen Ursprungsgeraden $f(x) = m \cdot x$ für $a = 0;\ b = h\ (m > 0;\ h > 0)$ nach!
(Fertigen Sie auch eine Skizze an!)

[15] vgl. EPA Mathematik, a. a. O. Seite 12f., Fachliche und methodische Kompetenzen oder die Angaben hier Seite 10-11

5.1.3 Beispiel Globale Bevölkerungsdynamik

Analysisaufgabe (LF)

Unterrichtliche Voraussetzungen: Es wurde beschränktes Wachstum aber kein logistisches Wachstum behandelt.

Aufgabe

Die Größe und Struktur der Bevölkerung und ihre Veränderung sind für die Entwicklung jeder Gesellschaft ein wichtiges Moment – für Wohlstand und wirtschaftliche Dynamik ebenso wie für Ernährung, Energie, Gesundheit, Ökologie und Ressourcenverbrauch. Das gilt natürlich auch auf globaler Ebene.

Es ist daher nützlich, aus den entsprechenden Daten möglichst genaue Prognosen für die weitere Entwicklung der Bevölkerung zu gewinnen.

Entwicklung der Erdbevölkerung von 1700 bis 2000:

Jahr	1700	1750	1800	1850	1900	1925	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Bevölkerung in Mio.	590	700	840	1000	1540	1920	2555	2780	3039	3344	3790	4088	4458	4855	5285	5687	6081
Wachstum pro Jahr in Mio.							38	53	51,6	70,4	76,8	73	78	82,8	83,8	79,4	77

1. Kann man das Wachstum zwischen 1700 und 2000 näherungsweise als exponentielles Wachstum beschreiben? Begründen Sie Ihre Entscheidung!
2. Das sogenannte *logistische Wachstum* wird näherungsweise durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

   (*) $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$ (mit S>0; k>0; 0<f(0)<S sowie f(t)<S für alle t>0)

   Mit Hilfe dieser Funktion f soll das Bevölkerungswachstum beschrieben werden (f: Personenzahl in Mio., t: Zeit in Jahren nach 1700).

   2.1 Geben Sie die Einheiten der Größen f', S und k an.

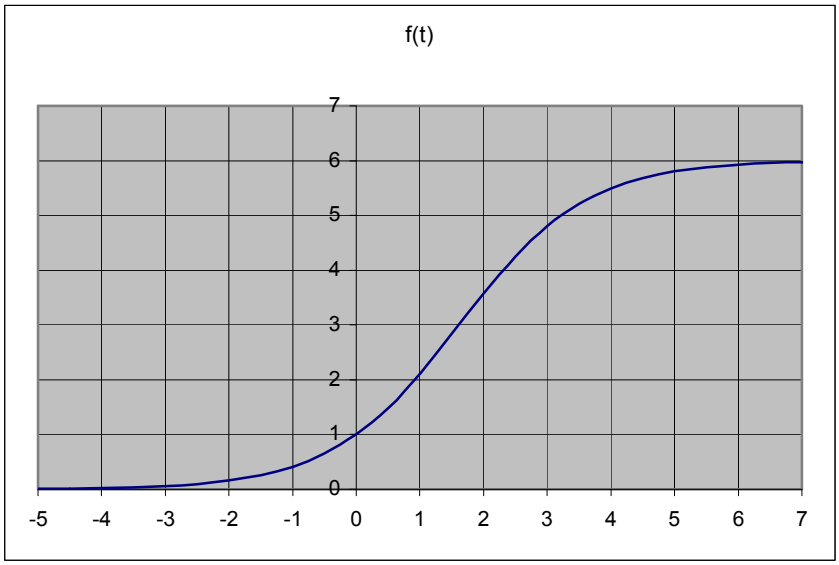
   2.2 Stellen Sie Überlegungen zum Vorzeichen von f' an und begründen Sie den qualitativen Verlauf des Graphen (s. u.) mit Hilfe der Differenzialgleichung (*).
   Vergleichen Sie das im Graphen erkennbare logistische Wachstum mit den Ihnen bekannten Wachstumsarten.

   2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion

   $$f(t) = \frac{S}{1 + \frac{S-a}{a} \cdot e^{-Skt}} \qquad (\text{mit } a := f(0))$$

   Lösung der Differenzialgleichung (*) ist.

2.4 Der Graph der Funktion f hat für S = 6, a = 1 und k = 0,16 folgenden Verlauf:

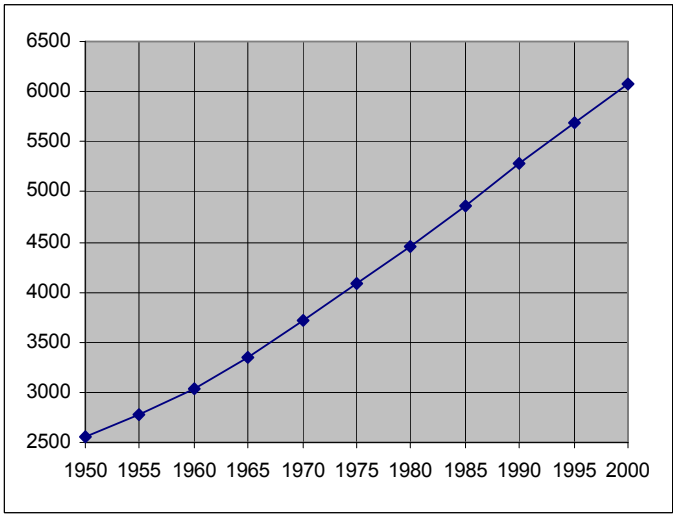


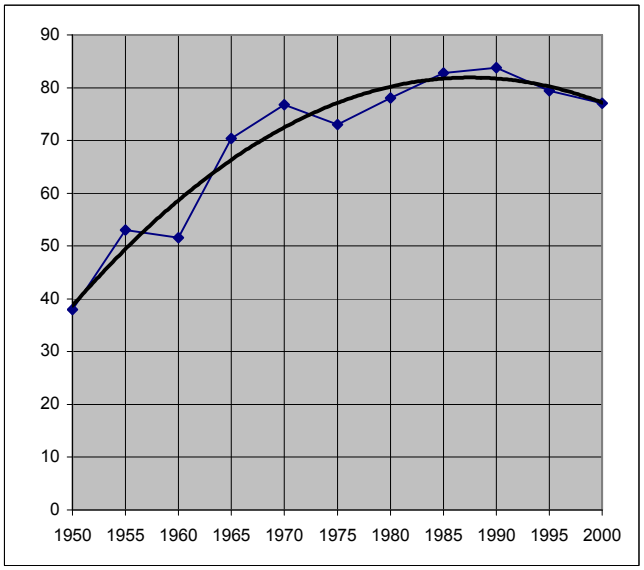
Er ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W\left(\frac{\ln\left(\frac{S-a}{a}\right)}{k \cdot S} \mid \frac{S}{2}\right)$.

2.4.1 Berechnen Sie mit diesen Informationen die Koordinaten des Wendepunkts und interpretieren Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang.

2.4.2 Untersuchen Sie die Funktion f für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3. In dem betrachteten Zeitraum haben sich die ökonomischen, gesellschaftlichen und medizinischen Bedingungen so stark geändert, dass das Wachstum abschnittsweise betrachtet werden muss. Daher wird jetzt nur der Bereich ab 1950 betrachtet.





Erläuterung zu den Diagrammen:

links: Entwicklung der Weltbevölkerung 1950 bis 2000; Bevölkerung in Mio.

rechts: Wachstum der Bevölkerung in Mio. pro Jahr ab 1950, zusätzlich ist eine Regressionskurve eingezeichnet.

3.1 Begründen Sie mit Hilfe der beiden oben stehenden Diagramme, dass man die Bevölkerungsentwicklung besser mit logistischem als mit exponentiellem Wachstum beschreiben kann.

3.2 Nennen Sie drei verschiedene Gründe, die die Brauchbarkeit dieses Modells beschränken.

4. Geben Sie eine möglichst gut begründete Prognose für die Entwicklung der Weltbevölkerung bis zum Jahr 2050 an. Erläutern Sie auch Ihre Vorgehensweise! (Hinweis: Nehmen Sie dabei Bezug auf den Wendepunkt.)
Wie gut ist die Approximation durch logistisches Wachstum?

Analyse

Diese Aufgabe unterscheidet sich von den üblichen Kurvendiskussionen dadurch, dass an mehreren Stellen Begründungen und Interpretationen verlangt werden (K5). Hier wird davon ausgegangen, dass die Lernenden exponentielles, aber noch kein logistisches Wachstum kennen.

Lösungsskizze

Zu 1:

t sei die Zeit in Jahren seit 1700. Ansatz: $f(t) = Ae^{kt}$, $f(0) = A = 590$,

$f(50) = Ae^{50k} = 700 \Rightarrow k = \frac{1}{50}\ln\frac{700}{590} \approx 0{,}003419$.

Vergleicht man die Tabellenwerte mit den Werten, die sich aus $f(t) = Ae^{kt}$ ergeben, so erkennt man, dass sich das Wachstum nur bis 1850 recht gut durch eine Exponentialfunktion beschreiben lässt.

Zu 2.1:

Die Frage nach den Einheiten zielt auf die Bedeutung der Größen in der Differenzialgleichung:

$f(t)$: momentane Bevölkerungszahl in Mio.

$f'(t)$: momentane Wachstumsgeschwindigkeit (Änderungsrate) der Bevölkerung in Mio./Zeiteinheit(Jahr)

S: (max.) Bevölkerungszahl in Mio.

k: Proportionalitätsfaktor in $\frac{1}{\text{Mio.} \cdot \text{Jahr}}$.

Zu 2.2: Am Graphen erkennt man:
Für *kleine t* liegt näherungsweise exponentielles Wachstum vor:
$f(0)=1$, $f(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$, $f'(t)>0$, $f''(t)>0$.

Ferner ist für kleine t f(t) klein gegen *S*, also (S-f(t)) annähernd konstant. Aus der Differenzialgleichung (*) folgt damit: $f'(t) \sim f(t)$ für kleine t. (Bedingung für exponentielles Wachstum)
Für *große t* gilt: Der Graph nähert sich von unten der Schranke S. Es liegt also ein nach oben beschränktes Wachstum vor. $f'(t)>0, f''(t)<0$, $f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} S$.

Ferner ist für große t f(t) annähernd konstant. Aus der Differenzialgleichung (*) folgt damit:
$f'(t) \sim (S - f(t))$ für große t. (Bedingung für beschränktes Wachstum)

Zu 2.3: In diesem Aufgabenteil wird das Anwenden von Ableitungsregeln verlangt. Durch Ableiten von f und Einsetzen von f und f' weist man die Behauptung nach.

Zu 2.4: In diesem Aufgabenteil wird auf den typischen Verlauf der Funktionen f der Schar aus 2.3 näher eingegangen. Die Parameter S, a und k sind einfach gewählt und es lässt sich der Wendepunkt berechnen zu: W(1,67|3).
Bedeutung von W: Im Wendepunkt ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit maximal.
Für $t \to \infty$ ist $y=6$ Asymptote, der Graph von f nähert sich von unten der oberen Schranke S=6.

Zu 3.1: Der Graph von f wächst zunächst leicht linksgekrümmt, dann annähernd linear, um dann in eine Rechtskurve überzugehen. Offenbar ist bei ca. 1985 eine Wendestelle. Das Wachstum pro Jahr (momentane Wachstumsgeschwindigkeit) hat ein Maximum bei 1988.

Zu 3.2: Die Annahme des logistischen Wachstums geht von gleichbleibenden Bedingungen aus. Folgende Gründe wie z. B.:

- Ereignisse (z. B. Naturkatastrophen), die die Bevölkerungszahlen beeinflussen,
- Krankheiten,
- medizinischer Fortschritt …

bleiben unberücksichtigt.

Zu 4: Es sind mehrere Lösungswege (z. B. auch über Spiegelung am Wendepunkt W (1988|5200)) möglich:

Rechnerisch z. B.: $\dfrac{\ln(\frac{S-a}{a})}{k \cdot S} = 1988 \Rightarrow$ (mit $a = f(0) = 2555$ und $S = 2 \cdot 5200$) $k = 2{,}883 \cdot 10^{-6}$.

Die logistische Funktion lautet damit $f(t) = \dfrac{10400}{1 + \frac{7845}{2555} \cdot e^{-2{,}883 \cdot 10^{-6} \cdot 10400 \cdot t}}$

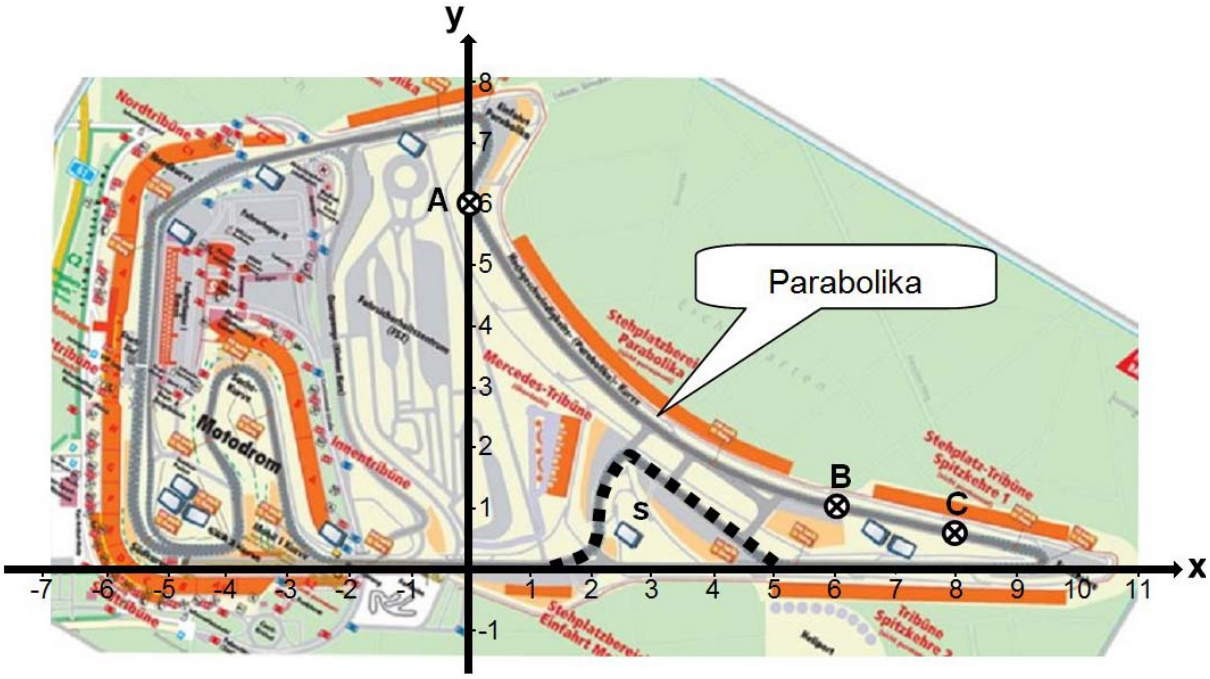
(t ist die Zeit zwischen den Jahren seit 1950). Daraus ergeben sich die Prognosen:

Jahr	2010 (t = 60)	2020 (t = 70)	2030 (t = 80)	2040 (t = 90)	2050 (t = 100)
Bevölk. (Mio.)	6832	7489	8066	8557	8963

Die Approximation durch eine logistische Funktion ist brauchbar, denn die mit Hilfe der Funktion berechneten Werte weichen zwischen 1950 und 2000 um höchstens 150 Mio. von den tatsächlichen Werten ab.

5.1.4 Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Analysis

Rund um den Hockenheimring (LF) Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern Abitur 2007 (bearbeitete Version)



Die Abbildung zeigt den Hockenheimring (eröffnet 1932, umgebaut 2002; dabei entstand die Parabolika, Fläche 97 Hektar, Länge 4574 m, Straßenbreite mindestens 15 m).
1LE im Koordinatensystem entspricht ca. 100 m in Wirklichkeit.

Die Punkte A(0|6), B(6|1) und C(8|0,5) der „Parabolikakurve“, einer langgestreckten Linkskurve sind vermessen worden. Der Kurvenverlauf soll nun nachträglich modelliert werden.

a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f, die durch diese drei Punkte geht und in A die Steigung -3 hat. Zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{83}{2304}x^3 + \frac{665}{1152}x^2 - 3x + 6$

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Rechnung, dass die Funktion f in dem betrachteten Bereich keine gute Modellierung für eine Linkskurve ist.

c) Modellieren Sie die Parabolika mit einer Exponentialfunktion der Form $g(x) = a \cdot e^{bx}$ unter Verwendung der Punkte A und B.
Untersuchen Sie die Abweichung der Modelle f und g an der Stelle x = 8 und prüfen Sie, ob der Graph von g im betrachteten Bereich das Kriterium der Linkskurve erfüllt.

d) Ein weiterer Vorschlag zur Modellierung der Parabolika ist die Funktion h mit

$$h(x) = (x+6)\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{x}{6}} = (x+6)\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x} \approx (x+6)\cdot 0{,}66^x.$$

Zeigen Sie, dass auch der Graph von h (G_h) durch A und B geht.
Beschreiben und begründen Sie den weiteren Verlauf (x > 6) von G_h mit Hilfe von h und h'.

e) Würde man das in der Abbildung gestrichelte Kurvenstück **s** begradigen, erhielte man eine sehr lange Gerade und eine nutzbare Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse, y-Achse und der Parabolika im Bereich von x=0 bis x=6, wenn von der Modellierung mit der Funktion h ausgegangen wird.

f)	Der Graph der ganzrationalen Funktion j mit $j(x)=\frac{7}{96}x^2-\frac{61}{48}x+6$ geht ebenfalls durch die Punkte A, B und C. Begründen Sie am Beispiel dieser Funktion, dass die zweite Ableitung nicht mit der Krümmung des Graphen übereinstimmen kann.

Analyse

Die Aufgabe zeigt, wie die Anwendung typischer Werkzeuge der Analysis aus dem starren Gerüst der Kurvendiskussion herausgelöst werden kann, um von einem rezeptartigen zu einem flexiblen Umgang damit zu gelangen (K3).

a) Standardrechnungen mit einer kleinen Herausforderung durch den Anwendungsbezug

b) Hier müssen bekannte Werkzeuge flexibel eingesetzt (K3) und Argumente genannt werden (K1).

c) Zunächst kommt wie in a) ein Standardverfahren zur Anwendung. Dann müssen Ergebnisse im Sinne des Modellkreislaufs interpretiert werden (K4). Der letzte Teil ist ähnlich gelagert wie bei b). Allerdings ist es hier vorteilhaft, mit einer allgemeinen e-Funktion zu argumentieren (K2, K8).

d) Argumentation für den Verlauf von h(x) mit Hilfe der ersten Ableitung und dem Grenzwert für $x \to \infty$ (K3, K5).

e) Es muss das geeignete Integrationsverfahren erkannt (K3) und das Ergebnis interpretiert werden (K4).

f) Dieser Aufgabenteil ist in dieser Form nur sinnvoll, wenn die Krümmung nur qualitativ (Krümmungsverhalten rechts-links) behandelt wurde. Hier sind vor allem Argumentation und Interpretation gefordert (K2, K4).

	Lösungsskizze	
a	Ansatz $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ (4 Bedingungen, also 4 Variablen). Gesucht: Reelle Zahlen a, b, c, d. Bedingungen: f(0)=6, f(6)=1, f(8)=0,5, f ’(0) = -3 Ableitung von f: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ Anwenden der Bedingungen: $f(0)=6 \Rightarrow d=6$ $f(6)=1 \Rightarrow 216a+36b+6c+6=1$ $f(8)=0{,}5 \Rightarrow 512a+64b+8c+6=0{,}5$ $f'(0)=-3 \Rightarrow c=-3$ Es bleiben zwei Gleichungen für die Variablen a und b übrig: $\begin{cases}216a+36b-18+6=1\\512a+64b-24+6=0{,}5\end{cases}$, folglich $\begin{cases}216a+36b=13\\512a+64b=18{,}5\end{cases}$, also $b=\frac{13}{36}-6a$ und somit $512a+64(\frac{13}{36}-6a)=74{,}5$. Damit folgt:	A I/II Einfache Rechnungen, erschwert durch Anwendungsbezug und Komplexität der Aufgabe

	$512a - 384a = 18{,}5 - \frac{16 \cdot 13}{9}$ $\Leftrightarrow 128a = \frac{37}{2} - \frac{208}{9} = \frac{333-416}{18} = -\frac{83}{18}$ $\Rightarrow a = -\frac{83}{2304} \Rightarrow b = \frac{13}{36} + \frac{83}{384} = \frac{665}{1152}$ Lösungsangabe: $f(x) = -\frac{83}{2304}x^3 + \frac{665}{1152}x^2 - 3x + 6$. Probe entfällt.	
b	$f''(x) = \frac{665}{576} - \frac{83}{384}x$ hat bei x≈5,3 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von „+“ nach „-“, also geht dort die Links- in eine Rechtskurve über.	
c	Ansatz $g(x) = a \cdot e^{bx}$. Bedingungen ähnlich zu a). g(0)=6 impliziert $a \cdot e^0 = 6 \Rightarrow a = 6$ g(6)=1 impliziert , $1 = 6 \cdot e^{b \cdot 6}$ folglich $6b = \ln(\frac{1}{6})$, also $b = \frac{1}{6} \cdot \ln(\frac{1}{6}) \approx -0{,}3$. $g'(x) = 6 \cdot (-\frac{\ln 6}{6}) \cdot e^{\frac{-\ln 6}{6} \cdot x} = -\ln 6 \cdot e^{\frac{-\ln 6}{6} \cdot x}$ $g(8) = 6 \cdot e^{\frac{-\ln 6}{6} \cdot 8} \approx 0{,}55$; $f(8) = 0{,}5$. Der Unterschied beträgt etwa 5 m. $g(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ gilt $g''(x) = a \cdot b^2 \cdot e^{b \cdot x}$, d. h., es gibt keinen Vorzeichenwechsel und wegen a>0 beschreibt der Graph eine Linkskurve.	A I/II Einfache Aufgabe, aber Umgang mit e- und ln-Funktion eher ungewohnt
d	$h(x) = (x+6) \cdot (\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}} = (x+6) \cdot e^{-\frac{\ln 12}{6} \cdot x}$ $h'(x) = (1) \cdot (\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}} + (x+6) \cdot (\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}} \cdot (\frac{-\ln 12}{6}) = (1 - \frac{\ln 12}{6}x - \ln 12) \cdot e^{-\frac{\ln 12}{6} \cdot x}$ $h(0) = (0+6) \cdot (\frac{1}{12})^{\frac{0}{6}} = 6 \cdot (\frac{1}{12})^0 = 6$, $h(6) = (6+6) \cdot (\frac{1}{12})^{\frac{6}{6}} = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1$ Die Punkte A und B liegen auf dem Graphen. $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}[(x+6) \cdot (\frac{1}{12})^{-\frac{x}{6}}] = \lim_{x\to\infty}[x \cdot (\frac{1}{12})^{-\frac{x}{6}}] + \lim_{x\to\infty}[(\frac{1}{12})^{-\frac{x}{6}}]$ $= \lim_{x\to\infty}[\frac{x}{(\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}}}] + 0 \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}[\frac{6}{\ln(\frac{1}{12})} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}}}] = 0.$ h bleibt positiv, da beide Faktoren von h(x) positiv sind. h ist streng monoton fallend, da für x>6 der erste Faktor von h’ negativ und der zweite positiv ist, h’(x) also negativ ist.	erster Teil A I/II zweiter Teil A II/III: Interpretation des weiteren Verlaufs neu und schwer

e	Da die Funktion überall positive Werte annimmt, gilt für den Flächeninhalt $A=\int_0^6 h(x)dx$. Die Stammfunktion zu $h(x)=(x+6)\cdot(\frac{1}{12})^{\frac{x}{6}}=(x+6)\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}$ bestimmen wir mit partieller Integration: $u(x)=x+6 \qquad v'(x)=e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}$ $u'(x)=1 \qquad v(x)=-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}$.	
	Folglich gilt: $\int_0^6 (x+6)\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}dx$ $=[(x+6)\cdot(-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x})]_0^6-\int_0^6 -\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}dx$ $=[(x+6)\cdot(-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x})]_0^6+\int_0^6 \frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}dx$ $=[(x+6)\cdot(-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x})]_0^6-\left[\frac{36}{(\ln 12)^2}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot x}\right]_0^6$ $=12\cdot(-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot 6})-6\cdot(-\frac{6}{\ln 12}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot 0})$ $-\frac{36}{(\ln 12)^2}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot 6}+\frac{36}{(\ln 12)^2}\cdot e^{-\frac{\ln 12}{6}\cdot 0}$ $=-\frac{72}{\ln 12}\cdot(\frac{1}{12})+\frac{36}{\ln 12}-\frac{36}{(\ln 12)^2}\cdot(\frac{1}{12})+\frac{36}{(\ln 12)^2}$ $=\frac{33+30\cdot\ln 12}{(\ln 12)^2}\approx 17$ Das entspricht einer Fläche von ca. 17 ha.	A II Partielle Integration im Unterricht behandelt, aber eher mit übersichtlicheren Funktionen
f	$j(x)=\frac{7}{96}\cdot x^2+\frac{61}{48}\cdot x+6 \qquad j'(x)=\frac{7}{48}\cdot x+\frac{61}{48}$ Die zweite Ableitung ist konstant: $j''(x)=\frac{7}{48}$. Konstante Krümmung liegt bei einer Kreisbahn vor, der Graph von j ist jedoch eine Parabel.	A I (zweite Ableitung), A III (Argumentation)

5.2 Lineare Algebra

Für die lineare Algebra sind im Lehrplan Schwerpunktsetzungen durch Wahlpflichtgebiete vorgesehen:[16]

1. Vektorielle analytische Geometrie: Der Schwerpunkt liegt in der Beschreibung von Geraden, Ebenen und Kugeln sowie deren Lage zueinander und der Untersuchung von Schnittmengen.

2. Vektoren und Matrizen: Der Schwerpunkt liegt bei den nichtgeometrischen Anwendungen von Matrizen.

3. Vektorräume und lineare Abbildungen: Den Schwerpunkt bilden die affinen Abbildungen.
Die Analyse von zwei Aufgabenbeispielen aus den Wahlpflichtgebieten 2 und 3 soll zeigen, welche Kompetenzen zur Lösung solcher Aufgaben benötigt werden bzw. bei der Behandlung im Unterricht dadurch vermittelt werden können.

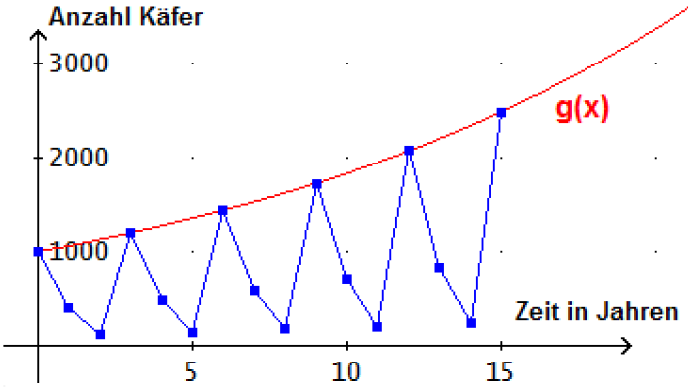
5.2.1 Beispiel für eine Populationsentwicklung – Käferpopulation

Käfer durchlaufen in ihrer Entwicklung mehrere Stadien. Für die folgende Aufgabe wird ein vereinfachtes Modell benutzt:

- Die Anzahl der Eier, die ein Käferweibchen legt, ergibt umgerechnet auf die gesamte Population einen Durchschnittswert von 10 Eier/Käfer. Die Käfer sterben nach der Eiablage.
- Nach einem Jahr haben sich 30 % der Eier zu Larven entwickelt. Die übrigen Eier sind z. B. von Vögeln gefressen worden.
- Nach einem weiteren Jahr werden 40 % der Larven nach dem Verpuppen zu Käfern, die ein Jahr später wieder Eier legen.

a) Berechnen Sie die Entwicklung einer Anfangspopulation aus 1000 Eiern, 1000 Larven und 1000 Käfern über die ersten 6 Jahre und stellen Sie die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle dar.

b) Die Grafik zeigt die Entwicklung der Käferpopulation in den ersten 15 Jahren. Dabei ist deutlich ein zyklisches Verhalten erkennbar. Begründen Sie dieses Verhalten.



c) **GF:** Das langfristige Wachstumsverhalten wird beschrieben durch die Funktion $g(x) = 1000 \cdot (\sqrt[3]{1,2})^x$. Begründen Sie diese Formel.

LF: Bestimmen Sie die Funktion g, die das langfristige Wachstum beschreibt.

[16] siehe Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe), Seite 63

d) **GF:** Durch ein Insektizid kann der Anteil der Eier, die sich zu Larven entwickeln, gesenkt werden. Berechnen Sie den Wert für die Übergangsrate, bei der sich ein stabiler Zyklus einstellt.

LF: Durch Insektizide lassen sich die Übergangsraten zwischen den einzelnen Stadien beeinflussen. Finden Sie eine Bedingung für diese Übergangsraten, unter denen es zu einer langfristig (zyklisch) stabilen Population kommt.

e) Das Modell wird nun folgendermaßen abgewandelt: Ein Käfer (ungeschlechtlich) legt pro Monat ein Ei. Nach einem Monat entwickelt sich das Ei zu einem neuen Käfer. In dem zu betrachtenden Zeitraum stirbt kein Käfer. Das Experiment startet mit einem Ei. Zeichnen Sie für die Zustände „Anzahl der Eier" und „Anzahl der Käfer" einen Übergangsgraphen, der das monatliche Wachstum beschreibt und stellen Sie die dazugehörende Übergangsmatrix auf.

GF: Berechnen Sie die Entwicklung der Käfer für die ersten 6 Monate und stellen Sie für die Anzahl k_n der Käfer im n-ten Monat eine Rekursionsformel auf.

LF: Beweisen Sie die für die Anzahl k_n der Käfer im n-ten Monat gültige Formel:

$k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$ mit $k_0 = 1$ und $k_1 = 1$ für $n \geq 2$.

Analyse

a) *In diesem Aufgabenteil machen sich die Schülerinnen und Schüler vertraut mit dem Mechanismus der Populationsentwicklung (K3).*[17] *Dazu sind ein entsprechendes Modell (K4) und eine passende Darstellung (K2) notwendig. Hier wird schon die Bedeutung der verschiedenen Übergangsraten als Wachstumsfaktoren vorbereitet, die in Teilaufgabe b) benötigt werden.*

b) *Hier zeigt sich, ob der Wachstumsmechanismus verstanden wurde. Dabei ist vor allem Argumentieren gefragt (K5).*

c) ***GF:*** *Es muss eine Regel (hier: die Funktion) erläutert werden (K5). Dazu müssen die Informationen entsprechend ausgewählt (K8) und ein Ergebnis im Ausgangskontext interpretiert werden (K4).*

LF: *Zusätzlich sind heuristische Strategien gefragt (K5).*

Die Differenzierung besteht im Wesentlichen im Grad der Vorstrukturierung (D1)[18] *bzw. im Umfang der bereitgestellten Informationen (D6).*

d) *Hier sind heuristische Strategien hilfreich – z. B. Konkretisieren durch Ausprobieren (K5) – sowie grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit mathematischen Techniken (K3).*

Die Differenzierung wird hier durch den Grad der Allgemeinheit erreicht (D2).

e) ***GF:*** *Hier gilt es z. B., Analogien zu erkennen (Fibonacci-Zahlen) (K5) und mit Rekursionsformeln sicher und flexibel umgehen zu können.*

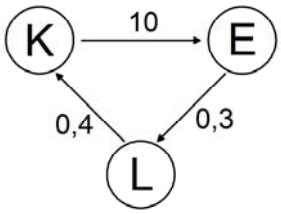
LF: *Hier geht es in erster Linie um einen Beweis (K5), aber auch um ein heuristisches und systematisches Bearbeiten des Problems (K8).*

Die Differenzierung wird einerseits durch den Grad der Offenheit (D4), – es gibt mehrere Wege zur Herleitung – andererseits durch den Schwierigkeitsgrad (D2) erreicht.

---

[17] vgl. Bezeichnung der Kompetenzen aus den EPA auf Seite 10 und 11
[18] vgl. Kapitel 4.2 Seite 11

Lösungen

Übergangsgraph	Übergangstabelle	Übergangsmatrix
		$U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$

nach\von	K	E	L
K	0	0	0,4
E	10	0	0
L	0	0,3	0

a) Tabelle

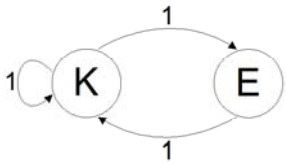
Jahre	Käfer	Eier	Larven
0	1000	1000	1000
1	400	10000	300
2	120	4000	3000
3	1200	1200	1200
4	480	12000	360
5	144	4800	3600
6	1440	1440	1440

b) Für die Anzahl der Käfer gilt:
$K_1=0{,}4\cdot L_0$; $K_2=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot E_0$; $K_3=10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot K_0=1{,}2\cdot K_0$.
Die Veränderung zum Vorjahr findet mit immer wiederkehrenden Faktoren statt, wodurch das zyklische Verhalten entsteht: der Bestand sinkt auf 40%, dann auf 30% (also insgesamt auf 12%) dann verzehnfacht er sich usw.

c) $g(0)=1000$; $g(3)=1000\cdot 1{,}2$; $g(6)=1000\cdot 1{,}2^2$ $\rightarrow$ $g(3x)= 1000\cdot 1{,}2^x$
also $g(x)=1000\cdot 1{,}2^{\frac{x}{3}}=1000\cdot\left(\sqrt[3]{1{,}2}\right)^x$.

d) Mit $U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ und $U^3=\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$ folgt als Bedingung: abc=0.

e) k_n : Anzahl der Käfer nach n Wochen, $e_n= k_{n-1}$: Anzahl der Eier nach n Wochen,



; $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_n \\ k_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_n+k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix}$.

5.2.2 Beispiel Spatprodukt – Lineare Algebra Teilaufgabe

Traditionelle Version mit Vorschlägen zur Veränderung

Als Teilaufgabe der Linearen Algebra wird sehr häufig die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der Cramerschen Regel verlangt. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem (mit Hilfe des Gauß-Algorithmus/der Cramerschen Regel):

$$\left|\begin{array}{l} x+2y-z=8 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=7 \end{array}\right|$$

Möchte man vom reinen Anwenden eines Verfahrens wegkommen und die Aufgabe anspruchsvoller gestalten, kann man die Schülerinnen und Schüler veranlassen, sich in eine neue Notation einzudenken. Es geht hier um die Herleitung der Cramerschen Regel in verschiedenen Varianten, die verschiedene Differenzierungen ermöglichen. Wenn die Schülerinnen und Schüler diese Regel noch nicht kennen, lässt sich die veränderte Aufgabe klar dem Anforderungsbereich III zuordnen. Aber auch bei bekannter Cramerscher Regel erfordert eine für Schülerinnen und Schüler neue Notation erhöhtes Abstraktionsvermögen. Für das GF bieten sich auch Lückentexte in verschiedenen Varianten (s. u.) an. Insgesamt wird hier das Verwenden mathematischer Fachsprache (K1) und auch das Argumentieren und Begründen (K5) stärker betont. Sinn dieser Aufgabe ist es aufzuzeigen, wie man Beweise verstehen und nachvollziehen kann.

1. Möglichkeit: (für LF)

Neben den bekannten Verfahren können lineare Gleichungssysteme auch mit Hilfe des Spatproduktes $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ gelöst werden.

Sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ linear unabhängig, so hat das lineare Gleichungssystem

(*) $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}$ mit $\vec{d} \in V_3$ die Lösung:

$$x = \frac{[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]},\ y = \frac{[\vec{a}\vec{d}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]} \text{ und } z = \frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}.$$

a) Lösen Sie das LGS (*) nach z auf, indem Sie beide Seiten mit ($\vec{a} \times \vec{b}$) von links per Skalarprodukt multiplizieren und zeigen Sie damit die Korrektheit der Lösung für z.
An welchen Stellen wird die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gebraucht?
Unter welchen Bedingungen existiert keine Lösung für z?

Als Aufgabenteil b) bietet sich die Anwendung des Verfahrens aus a) an:

b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach dem Verfahren aus a):

$$\left|\begin{array}{l} x+2y-z=8 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=7 \end{array}\right|$$

(Hinweis: Auf zwei Nachkommastellen runden!)
Lösungsskizze: Siehe Varianten für das Grundfach!

2. Möglichkeit: (für GF)

Neben den bekannten Verfahren können lineare Gleichungssysteme auch mit Hilfe des Spatproduktes $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ gelöst werden:

Sind die drei Vektoren linear unabhängig, so hat das lineare Gleichungssystem

(*) $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}$ mit $\vec{d} \in V_3$ die Lösung:

$$x = \frac{[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]},\ y = \frac{[\vec{a}\vec{d}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]} \text{ und } z = \frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}.$$

a) Variante 1:

Füllen Sie die Lücken und kommentieren Sie folgende Herleitung der Lösung für z:

Um nach z auflösen zu können, müssen x und y aus der gegebenen Gleichung eliminiert werden.

Dazu multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung von links per Skalarprodukt mit einem Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Es bietet sich _____ an:

$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}$

$\Rightarrow$ _____

$\Rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y +$ _____ $\bullet \vec{c} \cdot z =$ _____ $\bullet \vec{d}$

$\Rightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \cdot z = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$

$\Rightarrow z = \dfrac{[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ q.e.d.

(Man darf durch $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ dividieren, da _____)

Um nach x bzw. y aufzulösen, multipliziert man die Ausgangsgleichung mit _____ bzw. mit _____ .

Lösung

Die Lücken werden folgendermaßen gefüllt:

$(\vec{a} \times \vec{b})$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} \cdot x + (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{b} \cdot y + (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \cdot z = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}$; $(\vec{a} \times \vec{b})$; $(\vec{a} \times \vec{b})$

… die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ linear unabhängig sind und somit das Spatprodukt eine reelle Zahl $\neq 0$ ist. ; $(\vec{b} \times \vec{c})$; $(\vec{a} \times \vec{c})$

a) Variante 2:

Weisen Sie nach, dass dies die Lösung ist, indem Sie die Lücken füllen:

$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}$

$\vec{a} \cdot \dfrac{[\vec{d}\vec{b}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]} +$ _____ $= \vec{d}$

$\vec{a} \cdot [\vec{d}\vec{b}\vec{c}] +$ _____ $= \vec{d} \cdot [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$

$\vec{a} \cdot (\vec{d} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} + \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) \bullet \vec{c} +$ _____ $=$ _____ $\quad | \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet$

$(\vec{a} \times \vec{b})$ ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften: _____

Folglich ergibt sich:

$[\ (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}\ ] \cdot [\ (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}\ ] = [\ (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}\ ] \cdot [\ (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}\ ]$ q.e.d

Warum existiert nur dann eine Lösung für (x, y, z) wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind?

Lösung: Die Lücken werden folgendermaßen gefüllt:

$\vec{b} \cdot \frac{[\vec{a}\vec{d}\vec{c}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]} + \vec{c} \cdot \frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$; $\vec{b} \cdot [\vec{a}\vec{d}\vec{c}] + \vec{c} \cdot [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$; $\vec{c} \cdot [(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}]$; $\vec{d} \cdot [(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}]$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{0}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Es existiert nur dann eine Lösung für (x,y,z), wenn das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ ungleich Null ist, da man durch das Spatprodukt dividiert.

a) Variante 3:

Begründen Sie an den nummerierten Stellen den jeweiligen Schritt und ergänzen Sie die Satzstücke:

Um nach z auflösen zu können, müssen x und y aus der gegebenen Gleichung eliminiert werden.

Dazu multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung per Skalarprodukt mit ($\vec{a} \times \vec{b}$), denn (….)

$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \vec{d}$

$\Rightarrow [(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a}] \cdot x + [(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{b}] \cdot y + [(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}] \cdot z = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}$

$\Rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} \cdot z = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}$ (1)

$\Rightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \cdot z = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]$ (2)

$\Rightarrow z = \frac{[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]}{[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]}$ q.e.d.

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ ist eine reelle Zahl, die $\neq 0$ ist, denn (….)

Um nach x bzw. y aufzulösen, multipliziert man die Ausgangsgleichung mit (….) bzw. mit (….).

Lösung

Lücken: $(\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{0}$ (Äquivalenzumformung) und steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$;

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig;

Zu (1) $(\vec{a} \times \vec{b})$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und zwei Vektoren, die senkrecht stehen, ergeben als Skalarprodukt 0;

Zu (2) Anwendung der Definition

Bei allen drei Varianten lässt sich natürlich wieder als von a) unabhängiger Aufgabenteil b) die Anwendung des Verfahrens stellen:

b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach diesem Verfahren:

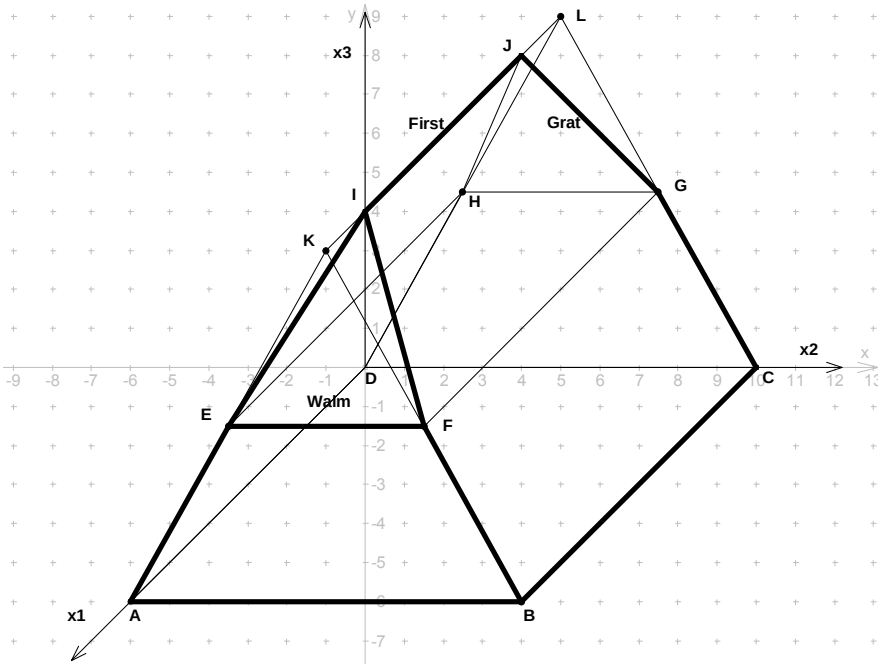
$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 7 \end{array} \right| .$$

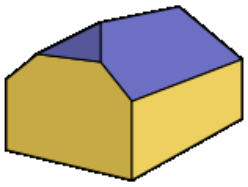
(Hinweis: Auf 2 Nachkommastellen runden!) Lösung: $x = \frac{24}{8} = 3$; $y = \frac{16}{8} = 2$; $z = \frac{-8}{8} = -1$.

5.2.3 Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Analytischen Geometrie, Wahlpflichtbereich 1

Analytische Geometrie LF: Das Krüppelwalmdach

Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern
Abitur 2007





Die Figur zeigt ein Krüppelwalmdach. Im Koordinatensystem gelte A(12|0|0), B(12|10|0), C(0|10|0), D(0|0|0), K(12|5|9), L(0|5|9), I(10|5|9), J(2|5|9)
(eine Längeneinheit entspricht ca. 1 m).

a) Aus ästhetischen Gründen sind die Punkte E, F, G, H als Seitenmitten von $\overline{AK}$, $\overline{BK}$, $\overline{CL}$, $\overline{DL}$ gewählt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
[Teilergebnis E(12|2,5|4,5); F(12|7,5|4,5)]

b) Der Bauherr behauptet, dass der Winkel EIF kleiner als 45° erscheint, was ihm zu spitz wäre. Überprüfen Sie diese Aussage.

c) Krüppelwalmdächer sind besonders stabil. Die Stabilität hängt vom Neigungswinkel des Walms EFI gegen die horizontale Ebene EFGH ab. Berechnen Sie diesen Winkel.

d) Das Dach soll mit einem Stützbalken stabilisiert werden. Eine Möglichkeit dafür besteht darin, zunächst einen Balken $\overline{BJ}$ („Windrispe“) einzubauen und dann von der Traufe $\overline{AD}$ einen möglichst kurzen Balken gegen $\overline{BJ}$ anzubringen. Wie lang ist dieser Balken?

e) Ein Schornstein soll aus dem Walm EFI beim Punkt P(10,8|5|7,2) heraustreten. Nach DIN muss er den First um mindestens 40 cm überragen oder seine Mündung mindestens 1 m von der Dachfläche entfernt sein. Erfüllt ein (über P) 1,5 m hoher Schornstein die DIN-Norm?

Nr	**Lösungsskizze**	
a)	$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OK}) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\5\\9\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}12\\2,5\\4,5\end{pmatrix}$, E(12|2,5|4,5). Analog $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}12\\7,5\\4,5\end{pmatrix}$, F(12|7,5|4,5), $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix}0\\7,5\\4,5\end{pmatrix}$, G(0|7,5|4,5), $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix}0\\2,5\\4,5\end{pmatrix}$, H(0|2,5|4,5).	A I: Einfache, geläufige Berechnungen
b)	$\overrightarrow{IE} = \vec{e} - \vec{i} = \begin{pmatrix}12\\2,5\\4,5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2,5\\-4,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IF} = \vec{f} - \vec{i} = \begin{pmatrix}12\\7,5\\4,5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2,5\\-4,5\end{pmatrix}$ $\measuredangle(\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}) = \arccos\frac{\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}}{\lvert\overrightarrow{IE}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{IF}\rvert} = \arccos\frac{\begin{pmatrix}2\\-2,5\\-4,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2,5\\-4,5\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2,5\\-4,5\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}2\\2,5\\-4,5\end{pmatrix}\right\rvert}$ $= \arccos\frac{4-6,25+20,25}{4+6,25+20,25} = \arccos\frac{18}{30.5} = \arccos\frac{36}{61} = 53,8°$. Der Winkel ist größer als 45°. (Alternativ: Seitenlängen des gleichschenkligen Dreiecks EFI bestimmen und darüber die Winkel berechnen.)	A I/II: Bekannte, etwas aufwändige Berechnung
c)	Mittelpunkt M von EF: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix}12\\2,5\\4,5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\7,5\\4,5\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}12\\5\\4,5\end{pmatrix}$ Der gesuchte Winkel ist $\measuredangle(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{FG}) = \arccos\frac{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{FG}}{\lvert\overrightarrow{MI}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{FG}\rvert} = \arccos\frac{(\begin{pmatrix}10\\5\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\5\\4,5\end{pmatrix})\cdot(\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix})}{\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\0\\4,5\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert} =$ $= \arccos\frac{24}{\sqrt{4+20,25}\cdot 12} = 66,0°$. (Alternativ: Ebene EFI in NF aufstellen und den Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und dem Einheitsvektor in x_3-Richtung berechnen)	A I/II: Bekannte, etwas aufwändige Rechnung

d)	Der Balken hat die Länge des Abstands der Geraden g_1=AD und g_2=BJ. $g_1: \vec{x} = r\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}10\\5\\-9\end{pmatrix}$ Hilfsebene, die g_2 enthält und parallel zu g_1 ist: Stützvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix}$. Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\108\\60\end{pmatrix}$. Normiert: $\vec{n}_0 = \frac{\begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{81+25}} = \frac{\begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{106}}$. HNF: $\frac{\begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{106}} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix}) = 0$. Abstand folglich $\left\lvert \frac{\begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{106}} \cdot (\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix}) \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{\sqrt{106}} \cdot \begin{pmatrix}0\\9\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-12\\-10\\0\end{pmatrix} \right\rvert = \frac{90}{\sqrt{106}} \approx 8{,}74$. (Alternativ: Optimierungsproblem: Finde je einen Punkt P auf $\overline{AD}$ und Q auf, die $\overline{BJ}$ minimale Entfernung haben.)	A II/III Abstand windschiefer Geraden in Verbindung mit Anwendung
e)	7,2+1,5=8,7 Die erste Bedingung ist nicht erfüllt. Versuchen wir, die zweite Bedingung zu überprüfen: Spitze des Schornsteins: $\begin{pmatrix}10{,}8\\5\\7{,}2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10{,}8\\5\\8{,}7\end{pmatrix}$ Abstand der Spitze vom Dach: Ebenengleichung der Walmebene: Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22{,}5\\0\\10\end{pmatrix}$. Normiert: $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{606{,}25}}\begin{pmatrix}22{,}5\\0\\10\end{pmatrix}$ HNF: $\frac{\begin{pmatrix}22{,}5\\0\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{606{,}25}} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix}10\\5\\9\end{pmatrix}) = 0$	A II/III: Ungewohnte Aufgabenstellung

	Abstand zur Dachebene: $\left\lvert \frac{\begin{pmatrix}22,5\\0\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{606,25}} \cdot \left(\begin{pmatrix}10,8\\5\\8,7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\5\\9\end{pmatrix}\right) \right\rvert = \left\lvert \frac{\begin{pmatrix}22,5\\0\\10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0,8\\0\\-0,3\end{pmatrix}}{\sqrt{606,25}} \right\rvert$ $= \left\lvert \frac{18-3}{\sqrt{606,25}} \right\rvert = \frac{15}{\sqrt{606,25}} = 0,61$ Der Schornstein darf so nicht gebaut werden.	

Analyse

Bei dieser Aufgabe werden mathematische Verfahren angewendet, um realitätsnahe Probleme zu lösen (K4). Dabei wird vor allem eine gute Raumanschauung vorausgesetzt (K6).

a) Einfache Rechnung, die lediglich das Berechnen von Mittelpunkten von Strecken verlangt

b) Standardverfahren zur Winkelbestimmung mit Anwendungsbezug

c) Hier ist räumliches Vorstellungsvermögen gefragt (K6) sowie ein sachgerechtes und flexibles Umgehen mit grundlegenden mathematischen Verfahren (K3).

d) Bei diesem Aufgabenteil wird wie in c) eine sichere Raumanschauung gefordert (K6). Ferner müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sich das Problem über die Abstandsbestimmung windschiefer Geraden lösen lässt (K4, K3).

e) Hier wird neben der Raumanschauung vor allem das mathematische Modellieren und Interpretieren der Lösung (K4) verlangt.

5.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für das Gebiet Stochastik nennt der Lehrplan als Ziel, mit Denkweisen und Verfahren der Stochastik vertraut zu sein. Dabei sind die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen und das Anwenden der Binomialverteilung vorgesehen. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Fragestellung der beurteilenden Statistik, dem Testen von Hypothesen oder dem Schätzen von Wahrscheinlichkeiten. Die Abituraufgabenvorschläge zur Stochastik enthalten häufig zu viel Text. Im Bestreben, die unterrichteten Inhalte der Stochastik möglichst vollständig in den Abituraufgaben unterzubringen, entsteht eine umfangreiche Ansammlung von Teilaufgaben, in deren Kontexte sich Schülerinnen und Schüler erst einlesen müssen.

Dabei folgen die Aufgabenautoren folgendem Drehbuch:

1. Aufgabe: Frage nach Wahrscheinlichkeiten, die mit Binomialverteilung berechnet werden können (Bernoulli-Kette). Es werden alle Möglichkeiten „abgearbeitet": Genau ein Ereignis, verknüpfte Ereignisse mit „und“ und „oder“, Berechnung über Gegenereignis, Erwartungswert.

2. Aufgabe: Festgelegt werden zwei (oder mehr) Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit jeweils mit Hilfe der Definition für Laplace-Experimente (Anzahl der günstigen/Anzahl der möglichen Fälle) berechnet werden kann. Es ist durch Anwendung der Formel von Bayes zu zeigen, dass diese Ereignisse voneinander stochastisch unabhängig oder abhängig sind.

3. Neuer - oder im besten Fall erweiterter - Sachverhalt, bei dem ein Hypothesen-Test verlangt wird. Meist liegt ebenfalls eine binomialverteilte Zufallsgröße vor.

Diese Aufgaben entsprechen zwar den Inhalten, wie sie im Lehrplan dargestellt sind, sie beschränken sich aber häufig auf das Anwenden bestimmter Kalküle. Im Lehrplan dagegen wird betont, dass der Anwendungsbezug im Mittelpunkt stehen soll. „Besondere Bedeutung kommt der Interpretation des Ergebnisses eines Hypothesentests zu. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die Grenzen des Verfahrens erkennen.“[19]

Im Sinne der EPA kann in Teilaufgaben gegliedert werden, die jedoch nicht beziehungslos nebeneinander stehen sollen. Durch die Gliederung in Teilaufgaben können

- verschiedene Blickrichtungen eröffnet,
- mögliche Vernetzungen gefördert,
- Differenzierungen zwischen Grund- und Leistungsfach erreicht,
- unterschiedliche Anforderungsbereiche gezielt angesprochen werden.

Die Teilaufgaben einer Aufgabe sollen so unabhängig voneinander sein, dass eine Fehlleistung - insbesondere am Anfang - nicht die weitere Bearbeitung der Aufgabe unmöglich macht. Die Aufgliederung darf nicht so detailliert sein, dass dadurch ein Lösungsweg zwingend vorgezeichnet wird. Ein ausgewogenes Verhältnis zwischen formalen und anwendungsbezogenen (innermathematischen oder realitätsnahen) Prüfungsanforderungen ist zu gewährleisten.[20]

Unter den angeführten Aufgabenarten bieten sich für das Teilgebiet Stochastik insbesondere an:

- *Darstellung, Erläuterung und sachgerechte Anwendung von mathematischen Begriffen und Verfahren (K1, K2, K3)*[21]
- *Herleitungen, Begründungen und Beweise (K3, K5)*
- *Modellierung von Sachverhalten (K4)*

---

[19] Lehrplan Mathematik, Seite 44
[20] EPA, a. a. O. Seite 23, 3.1 Allgemeine Hinweise
[21] siehe Bezeichnung der Kompetenzen auf Seite 10-11

- *Interpretation, Vergleich und Bewertung von Daten, Ergebnissen, Lösungswegen oder Verfahren (K8)*

Dazu zählen Fragen nach der Modellierung des Sachverhaltes, wie die Wahl des Urnenexperiments, um das Problem in der Aufgabe zu beschreiben und zu lösen, Fragen zum Umfeld des Hypothesentests und Fragen nach dem „Testdesign". Hier werden Begründungen verlangt.

5.3.1 Beispiel Münzwurf

Stochastikaufgabe – traditionelle Version

Anne, Claudia und Bernd möchten für das nächste Schulfest ein Glücksspiel auf der Basis eines Münzwurfs entwickeln, dessen Einnahmen zur Finanzierung des Abiturballs beitragen sollen.

1. Zunächst experimentieren sie ein wenig, z.B.: eine ideale Münze wird dreimal geworfen. Anne hat beim dreimaligen Münzwurf auf das Ereignis A={ zzz, zzw, wzz, zwz }, Bernd auf das Ereignis B= { zzz, zzw, wzz, wzw } und Claudia auf das Ereignis C= {zzz, www} gesetzt.
   a) Formulieren Sie die Ereignisse A, B, C in Worten.
   b) Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

2. Es werden drei Varianten diskutiert:
   a) Anne und Bernd werfen abwechselnd drei ideale Münzen gleichzeitig und vereinbaren folgende Spielregeln: Anne erhält von Bernd 3 €, wenn dreimal Wappen geworfen wurde und 2 €, wenn zweimal Wappen auftritt. Sie zahlt an Bernd 1 €, wenn genau einmal Wappen erscheint und 6 €, wenn kein Wappen vorkommt. Analysieren Sie die Gewinnchancen der beiden.
   b) Es werden drei Münzen gleichzeitig geworfen. Bei dreimal Wappen gewinnt man 0,50 €, bei zweimal Wappen 0,30 €. Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair? Welchen Einsatz schlagen Sie vor, damit ein Gewinn von durchschnittlich 0,10 € pro Spiel für die Abiturkasse gemacht wird?
   c) Anne und Bernd werfen abwechselnd eine ideale Münze. Es soll derjenige gewinnen, der zuerst Wappen wirft. Bernd lässt Anne anfangen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anne gewinnt!

3. Aus einem Beutel mit drei Münzen, von denen eine auf beiden Seiten mit Zahl beschriftet ist, wird eine Münze zufällig gezogen und zweimal geworfen. Die Münze zeigt in beiden Fällen Zahl. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fehlerhafte Münze geworfen wurde.

4. Es werden zwei weitere Vorschläge gemacht:

   Vorschlag I: Die Münze wird zweimal geworfen und es gibt einen Gewinn, wenn mindestens einmal Kopf dabei ist.

   Vorschlag II: Die Münze wird viermal geworfen und es gibt den gleichen Gewinn, wenn mindestens zweimal Kopf dabei ist.

   a) Vergleichen Sie die beiden Varianten aus der Sicht des Spielers.

   b) Führen sie die Überlegungen allgemein für eine **nicht ideale** Münze durch.

   Hinweis: Benutzen Sie Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten von Zahl. Berechnen Sie jeweils die Verlustwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p und finden Sie ein p, bei dem diese bei beiden Vorschlägen gleich sind.

5. Claudia beobachtet, dass eine Münze bei 10 Würfen 7-mal Kopf zeigte. Nun ist sie im Zweifel, ob sich die Münze wie eine ideale Münze verhält.

   Kann auf dem Signifikanzniveau α=0,05 die Nullhypothese H_0: p=0,5 über die Wahrscheinlichkeit p von Kopf verworfen werden?

   Beraten Sie Claudia und erklären Sie ihr, was dieser Test über die Korrektheit der Münze aussagen kann.

Analyse

Der erste Teil dieser Stochastikaufgabe mit Fragestellungen zum dreimaligen Münzwurf überprüft die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Kenntnisse bei der Anwendung der Pfadregeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche und dient als Einführung in die Problematik der bedingten Wahrscheinlichkeit und des Testens. Schülerinnen und Schüler geben mögliche Ereignisse an, berechnen ihre Wahrscheinlichkeit nach der Definition für Laplace-Experimente (K1)[22] *und erklären den Rechenweg z. B. mit Hilfe der Pfadregel (K2).*

Die Fachsprache beschränkt sich auf Formeln und mathematische Symbole sowie die Formulierung der Ereignisse.

Aufgabe 1

Teil 1. a) enthält verglichen mit den üblichen Aufgaben in den Büchern eine umgekehrte Aufgabenstellung (K2) und Teil 1. b) fordert einfache Berechnungen (K3).

Variante: 1. b) Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und begründen Sie ihr Vorgehen (K8).

Aufgabe 2

In den Aufgabenteilen 2 a) und 2 b) wird mit dem Erwartungswert gearbeitet (K3). In 2 c) wird gebietsübergreifend eine Verbindung zur Analysis bzw. zur Linearen Algebra hergestellt (K7).

Variante 2 b) Erläutern Sie an diesem Beispiel den Begriff „Erwartungswert“ (K5).

[22] Vgl. Bezeichnung der Kompetenzen aus den EPA auf Seite 10-11

Variante 2c) Wenn Reihen und Prozesse nicht behandelt wurden, kann man abschätzen lassen, wann der Summand kleiner als $\frac{1}{1000}$ wird und lässt die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass Anne vorher gewonnen hat (K8).

Variante 2c) Wie ändert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn Anne nicht anfangen darf (K4)?

Variante 2c) Nehmen Sie zu der Aussage Stellung: „Beim 9. Wurf ist die Chance für Anne, zu gewinnen, schon geringer als 1%. Da kann man doch nach dem 8. Wurf sowieso aufhören." (K5).

Aufgabe 3

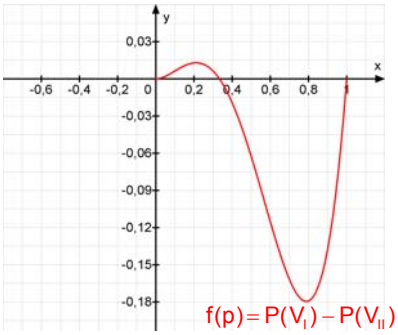
In dieser Aufgabe wird die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Werfen mit der fehlerhaften Münze (Ereignis A) gesucht ist, wenn zweimal Zahl erscheint (Ereignis S): $p(A|S)$ bzw. $p_S(A)$. Wurde der Satz von Bayes behandelt, ist hier neben einer einfachen Modellierung ein Standardverfahren gefragt (K3, K4).

Variante: Erläutern Sie an diesem Beispiel, die Begriffe „Bedingte Wahrscheinlichkeit" und „Stochastische Unabhängigkeit" (K8).

Aufgabe 4

Bei 4 a) handelt es sich um die Anwendung eines geübten Verfahrens (K3) zur Vorbereitung von 4 b). In der Anleitung zu diesem Aufgabenteil wird ein bestimmter Lösungsweg vorgegeben, da er ohne diese Hilfe zu einem sehr rechen- und zeitaufwändigen Lösungsweg führen kann.

Schülerinnen und Schüler müssen einiges an mathematischem Handwerkszeug verwenden und die Lösungen am gewählten Modell vergleichen (K3, K4).



Variante: Das Bild zeigt den Graphen von $f(p)=P(V_I)-P(V_{II})$. Interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang der Aufgabe (K2).

Aufgabe 5

Dieses Problemfeld ist sehr komplex. Das macht es schwierig, bei der offenen Formulierung als Berateraufgabe einen genauen Erwartungshorizont zu festzulegen, sicher kann nicht Alles in einer Schülerantwort erwartet werden. Bei den entsprechenden Begründungen kommt es insbesondere auf die Vorkenntnisse aus dem Unterricht an (K5, K8). Dieses Vorgehen sollte Claudia erklärt werden, wozu Textproduktion notwendig ist (K4, K5).

Variante: *Statt der offenen Formulierung konkreter:* Erläutern Sie im Zusammenhang mit diesem Problem die Begriffe „Fehler 1. und 2. Art", „Laplace-Bedingung", „Konfidenzinterval", ... (je nach unterrichtlicher Behandlung) (K5, K8).

Variante: *Statt der Vorgabe des Testdesigns*: Entwickeln Sie begründet einen Test, mit der Claudias Zweifel überprüft werden können (K3, K4).

Lösungen

Aufgabe 1

a) A: mindestens zweimal Zahl ; B: 2. Wurf Zahl ; C: drei gleich Ergebnisse.

b) $p(A) = p(B) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$; $p(C) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 2

a) Die Erwartungswerte der Gewinne von Anne und Bernd sind gleich: E(X) = 1,125.

b) Mit X_1 = {(w,w,w)} , $P(X_1)=\frac{1}{8}$ und X_2 = {(w,w,z), (w,z,w),(z,w,w)} , $P(X_2)=\frac{3}{8}$ und den Einsätzen erhält man mit $X := X_1 \cup X_2$ für den Erwartungswert E(X) = 0,175 €. Mit dem Gewinn für die Abiturkasse ergeben sich 0,275 €, und das sollte aus praktischen Gründen auf 0,30 € gerundet werden. Also wird ein leicht höherer Gewinn für die Kasse vorgeschlagen.

c) mögliche Berechnung über eine geometrische Reihe (Analysis):

$$p = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7 + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

oder mit Hilfe von Übergangswahrscheinlichkeiten (Lineare Algebra):

Fällt Wappen, gewinnt Anne, fällt Zahl, dann ist Bernd am Zug und hat die gleiche Chance wie Anne zu Beginn, also p(B) = $\frac{1}{2}$p(A) und mit p(A) + p(B)=1 folgt p(A)=$\frac{2}{3}$ und p(B)=$\frac{1}{3}$.

Aufgabe 3

A: Die Münze ist fehlerhaft. S: Es erscheint zweimal Zahl.

$$P(A \cap S) = \frac{1}{3},\ P(S) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},\ P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{2}{3}.$$

Die Rechnung und Argumentation kann auch mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel geführt werden.

Die Auswahl der Münze beeinflusst den Ausfall des Experiments, weshalb die Ereignisse stochastisch abhängig sind, wie man leicht nachrechnen kann: $P(A) \cdot P(S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \neq P(A \cap S) = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 4

a) Bei Vorschlag I hat der Spieler eine Gewinnchance von $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, bei Vorschlag II sind es nur $\frac{11}{16}$.

b) Für die Verlustwahrscheinlichkeiten gilt: $P(V_I) = p^2$; $P(V_{II}) = 4p^3(1-p) + p^4$

$P(V_I) = P(V_{II}) \rightarrow P(V_I)-P(V_{II}) = p^2(1 - 4p + 3p^2) = 0$ mit den Lösungen $p_1=\frac{1}{3}$ und $p_2=1$.

Daraus ergeben sich die Fälle:

Fall: $0<p<\frac{1}{3}$ Verlust bei V_I größer als bei V_{II}

Fall: $p = \frac{1}{3}$ gleiche Verluste bei V_I und V_{II}

Fall: $\frac{1}{3}<p<1$ Verlust bei V_I kleiner als bei V_{II}.

Aufgabe 5

Man nimmt an, dass man die dem Zufallsversuch zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p kennt. Es muss die Abweichung des Ergebnisses vom Erwartungswert sowie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis berücksichtigt werden. Man legt einen Annahme- und einen Verwerfungsbereich für diese Hypothese fest: Wenn μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung ist, dann ist in dieser Aufgabe der Annahmebereich [μ-1,6 σ; μ+1,6 σ] und das ist die 95 % Umgebung von μ.

Liegt das Stichprobenergebnis im Verwerfungsbereich, so ist die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art) 5 %. In diesen Fällen wird die Hypothese irrtümlich verworfen.

Liegt das Stichprobenergebnis im Annahmebereich, so kann auch hier ein Fehler vorliegen, wenn man die Hypothese annimmt (Fehler 2. Art), denn das Ergebnis kann zufällig im Annahmebereich liegen, obwohl p≠0,5 ist. Die Größe dieses Fehlers lässt sich nur ermitteln, wenn man p kennt.

Der Erwartungswert für die Anzahl von Kopf bei einem 10-stufigen BERNOULLI-Versuch ist $E(x) = \frac{1}{2}p \cdot n = 5$. Die Standardabweichung beträgt $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1{,}6$. Bei n-stufigen Bernoulli- Versuchen gilt nahezu unabhängig vom Stichprobenumfang n und der Erfolgswahrscheinlichkeit p, dass bestimmten Radien, die als Vielfache der Standardabweichung σ angegeben werden, bestimmte Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können. Allerdings muss σ >3 sein (LAPLACE-Bedingung), was für die gegebenen Zahlen nicht erfüllt ist. Aus der Bedingung kann man errechnen, dass Claudia mehr als 36 Versuche durchführen muss, um die Hypothese p = 0,5 zu testen.

Hätte sie die Münze z. B. 40 mal geworfen und 28 mal Kopf gehabt, dann wäre $\sigma = \sqrt{10} \approx 3{,}16$, die LAPLACE-Bedingung erfüllt und die 1,96 σ-Umgebung des Erwartungswertes E(x) = 20 besteht dann aus dem Annahmebereich A = {14,15,..20,..25,26}. Weil 28 nicht enthalten ist, wird die Münze nicht ideal betrachtet. Nur in 5 % aller möglichen Fälle würde man mit einer idealen Münze im Ablehnungsbereich liegen.

Besser ist es, wenn eine größere Anzahl von Würfen vorliegt. Nur dann unterscheiden sich die relativen Häufigkeiten im Experiment nicht zu sehr von den berechneten Wahrscheinlichkeiten. Es gibt auch die Möglichkeit, aus den Angaben die Größe einer Stichprobe zu berechnen, wenn die Abweichung des Ergebnisses vom wirklichen Anteil z. B. nur 3 %-Punkte betragen soll. Die Abweichung der relativen Häufigkeit $\frac{X}{n}$ in der Stichprobe von der Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt höchstens 3 %, wenn gilt: $\left|\frac{X}{n} - p\right| \le 1{,}96\frac{\sigma}{n} \le \frac{3}{100}$. Damit ermittelt man für p = 0,5 einen Stichprobenumfang von mindestens 1067. Also sollte Claudia die Münze so oft werfen und mit diesen Ergebnissen die Hypothese p = 0,5 testen.

5.3.2 Schaferkrankung

Leistungsfach: *(p unbekannt)*

Im Abitur werden häufig Aufgaben/Aufgabenteile zur Berechnung von Erwartungswerten von Zufallsvariablen gestellt, wobei die Zufallsvariablen meist binomialverteilt sind. Will man testen, ob die Schülerinnen und Schüler beispielsweise den Begriff *Erwartungswert* verstanden haben, sollte man neben dem reinen Anwenden von Formelwissen auch Begründungen und Argumentationen verlangen. Folgender Aufgabenteil bietet sich dazu an:

Die Schafspopulation eines Landes ist von einer bisher unbekannten Seuche betroffen. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p der kranken Schafe ist. Es wird von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgegangen. Äußerlich sind die erkrankten Schafe nicht von den gesunden Schafen zu unterscheiden, im Labor kann aber durch Untersuchung des Blutes der Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

Für eine Reihenuntersuchung zur Bestimmung von p soll man sich zwischen zwei Untersuchungsmethoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Schafen untersucht; dabei wird zunächst jedem Schaf Blut für eine Blutuntersuchung entnommen.

Methode 1: Es wird das Blut aller 20 Schafe vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf Erkrankung festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der Seuche fest, werden die 20 Blutproben noch einzeln untersucht.

Methode 2: Die 20 Blutproben werden von vornherein einzeln untersucht.

Es bieten sich folgende Varianten der Aufgabenstellung an:

Variante 1:

Schreiben Sie eine kurze Stellungnahme, welche Methode kostengünstiger ist. Nehmen Sie dazu auf die Wahrscheinlichkeit p Bezug.

Variante 2: (einfacher)

Welche Methode wird man wählen, wenn man weiß, dass die Krankheit nur sehr wenig Schafe befallen hat? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Variante 3: (Kombination)

Beraten Sie die Pharmaindustrie, welche Methode kostengünstiger ist.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Auswahl der Methode von p abhängt.

Untersuchen Sie die Grenzfälle $p = 0$ und $p = 1$.

Für welchen Bereich von p ist die Methode 1 günstiger?

Grundfach: *(p wird konkret vorgegeben)*

Die Schafspopulation eines Landes ist von einer bisher unbekannten Seuche betroffen. 15 % der Schafe tragen den Erreger in sich. Es wird von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgegangen. Äußerlich sind die erkrankten Schafe nicht von den gesunden Schafen zu unterscheiden, im Labor kann aber durch Untersuchung des Blutes der Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

Für eine Reihenuntersuchung soll man sich zwischen zwei Untersuchungsmethoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Schafen untersucht; dabei wird zunächst jedem Schaf Blut für eine Blutuntersuchung entnommen.

Methode 1: Es wird das Blut aller 20 Schafe vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf Erkrankung festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der Seuche fest, werden die 20 Blutproben noch einzeln untersucht.

Methode 2: Die 20 Blutproben werden von vornherein einzeln untersucht.
Welche Methode ist günstiger? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Analyse der Aufgabe LF

Schülerinnen und Schüler sollen folgendermaßen argumentieren, wobei insbesondere die Kompetenzen K1, K3, K4[23] sichtbar werden:

Variante 1:

Nach der Methode 1 benötigt man nur eine Untersuchung, wenn alle Schafe gesund sind und 21 Untersuchungen, wenn das Gegenereignis eintritt, d. h. mindestens ein Schaf erkrankt ist.

Ist X die Anzahl der erkrankten Schafe und Y die Anzahl der benötigten Untersuchungen, so sind für die Methode 1 durchschnittlich so viele Untersuchungen notwendig, wie die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass unter den 20 Schafen der Stichprobe entweder nur gesunde Schafe auftreten $P(X=0)=(1\text{-}p)^{20}$, wobei dann nur eine Untersuchung notwendig ist oder mindestens ein Schaf erkrankt ist, $P(X\geq 1)=1-(1\text{-}p)^{20}$, wobei dann 21 Untersuchungen notwendig sind. Also ergibt sich als Erwartungswert für die Anzahl der Untersuchungen: $E_1(Y)=(1-p)^{20}\cdot 1+[1\text{-}(1\text{-}p)^{20}]*21=21\text{-}20\cdot(1\text{-}p)^{20}$. Dabei wird angenommen, dass die relative Häufigkeit der Schaferkrankungen der Wahrscheinlichkeit im Modell entspricht.

Angemessenes Verwenden mathematischer Fachsprache: K1, sachgerechtes, flexibles und kritisches Umgehen mit grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren: K3.

Bei der Methode 2 werden immer $E_2(Y)=20$ Untersuchungen benötigt. Um zu vergleichen, welche Methode weniger Untersuchungen benötigt, muss die Differenz betrachtet werden.

Methode 1 ist günstiger, wenn $E_1(Y)<20$ ist. Das bedeutet, dass $21\text{-}20\cdot(1\text{-}p)^{20}<20$ und $(1-p)^{20}>\frac{1}{20}=0{,}05$. Dazu muss p<14 % sein.

Schülerinnen und Schüler müssen argumentieren und überlegen, wie die beiden Methoden zum Erwartungswert der Anzahl der Untersuchungen beitragen (K3, K4).

[23] vgl. Seite 10-11

Varianten 2 und 3:

Je weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen durchgeführt werden müssen, desto kostengünstiger ist es. Bei der Methode 1 werden entweder eine Untersuchung durchgeführt (falls kein Schaf krank ist) oder 21 Untersuchungen (falls mindestens ein Schaf krank ist).
Bei der Methode 2 erfolgen immer 20 Untersuchungen pro Schafgruppe.
Für sehr kleine Werte von p ist die Methode 1 (eine Untersuchung) kostengünstiger als Methode 2 (20 Untersuchungen).
Mathematisches Modellieren, hier: Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4).

Variante 3:

Für den Fall p = 0 ist die Methode 1 günstiger, es wird immer nur eine Untersuchung benötigt, weil kein Schaf erkrankt ist. Für p=1 ist jedes Schaf erkrankt und dann ist die Methode 2 mit 20 Untersuchungen günstiger. (Bei der Methode 1 wären es 21 Untersuchungen.)

Sachgerechtes Umgehen mit grundlegenden Begriffen und Verfahren, Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext, Argumentieren bei mathematischen Sachverhalten (K3, K4, K5).

Analyse der Aufgabe GF

Lösung mit p = 0,15 ergibt $E_1(Y) \approx 20{,}22$, d. h., es ist günstiger, die Schafe nach Methode 2 zu untersuchen.

Mathematisches Modellieren, hier: Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4).

Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfach: *Für die Aufgabe im GF müssen für den Ansatz dieselben Überlegungen wie im LF durchgeführt werden, die Rechnung und die Überlegungen sind aber mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit für die Erkrankung wesentlich einfacher (D2, D3).*

5.3.3 Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Stochastik

Stochastik LF **Verqualmt** Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern
Abitur 2007

Im Jahr 2001 hat „Die Zeit“ gemeldet, dass deutsche Schülerinnen und Schüler zwar bei Pisa nicht so gut abschneiden, aber im Vergleich zu anderen Ländern in Europa im Rauchen an der Spitze liegen. „Eine europäische Vergleichsstudie belegt, dass rund 70 Prozent der 15-Jährigen Erfahrungen mit Zigaretten gemacht haben, 25 Prozent rauchen täglich. Das ist fast Europarekord; nur österreichische Mädchen rauchen mehr.“ Im weiteren Verlauf der Meldung wird berichtet, dass vor allem auf dem Schulhof geraucht wird, wo es offiziell verboten ist. „Der schwarze Peter liegt mal wieder bei der Schule.“[24]

1 In Deutschland sind 15-jährige Schülerinnen und Schüler in der Regel in der 9. Jahrgangsstufe in Klassen mit durchschnittlich 25 Jugendlichen. In Teil 1 soll angenommen werden, dass sich Jugendliche immer noch so verhalten wie im Artikel beschrieben.

1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer 9. Klasse mindestens 10 Schülerinnen und Schüler **täglich** rauchen.

1.2 Bestimmen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Bereich, in dem die Anzahl der **täglichen** Raucher mit einer Sicherheit von 90% liegt, wenn fünf 9. Klassen befragt werden.

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 5 Klassen der 9. Jahrgangsstufe die Anzahl der Jugendlichen, die schon **Erfahrungen mit Zigaretten** gemacht haben, zwischen 72 und 100 liegt.

2 Das HSG ist seit dem 1.9.2003 „rauchfrei“. Die SV plant eine Untersuchung, mit der festgestellt werden soll, ob unter den Schülerinnen und Schülern am HSG weniger tägliche Raucher sind als der nach dem Zeitungsbericht zu erwartende Anteil von 25 %. Die SV beschließt zunächst die 110 Schülerinnen der MSS 13 zu befragen, die 2003 in der 9. Jahrgangsstufe waren.

2.1 Max schlägt vor, die Hypothese, dass am HSG weniger geraucht wird, anzunehmen, wenn höchstens 25 tägliche Raucher unter den Befragten sind. Bestimmen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, die Max in Kauf nimmt. Erläutern Sie die Bedeutung Ihres Ergebnisses im Sachzusammenhang.

2.2 Manuela schlägt vor, einen Test zu entwerfen, mit dessen Hilfe auf einem Signifikanzniveau von 3 % darauf geschlossen werden kann, dass es am HSG weniger als 25 % tägliche Raucher gibt.

3.1 Nehmen Sie nun an, dass an einer Schule von 200 befragten Oberstufenschülerinnen und -schülern 55 zugegeben haben, täglich zu rauchen.
Bestimmen Sie das Vertrauensintervall I zur Vertrauenszahl $\gamma = 0{,}90$ für die tatsächliche Raucherrate (genaue Rechnung!).
(Zur Kontrolle: I = [0,23 ; 0,33])
Erläutern Sie die Bedeutung des Ergebnisses im Sachzusammenhang!

3.2 Untersuchen Sie, ob es genügt, die rund 700 Schülerinnen und Schüler am HSG, die mindestens 15 Jahre alt sind, zu befragen, damit das Vertrauensintervall zu $\gamma = 0{,}99$ höchstens die Länge 0,1 hat.

[24] Hhttp://www.zeit.de/2001/09/Verqualmt

Analyse

1.1 Die Schülerinnen und Schüler machen sich mit dem Modell vertraut und berechnen die Wahrscheinlichkeit unter Benutzung der Tabelle (K4, K9).

1.2 Lösung der Aufgabenstellung im gewählten Modell mit veränderter Bernoulli-Kette und Überprüfung der Voraussetzung zum Anwenden der Formel (K4).

1.3 Lösen im gewählten Modell, jetzt mit p = 0,7 (K4).

2.1 Sachgerechtes Umgehen mit grundlegenden Begriffen und Verfahren, interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext, Argumentieren bei mathematischen Sachverhalten (K3, K4, K5).

2.2 Mathematisches Modellieren, Beschreiben der Ausgangssituation, der Modellannahme sowie Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4). Erläutern von Verfahren (K5).

3.1 Sachgerechtes, flexibles und kritisches Umgehen mit grundlegenden Verfahren (K3).

3.2 Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4).

Lösung

1.1	Zufallsexperiment: Bernoullikette mit n = 25 und Treffer : = „Person raucht täglich“, p = 0,25, X := „# Treffer“ ist $B_{25;\,0,25}$-verteilt $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F_{25;0,25}(9) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 1 - 0{,}9287 = 0{,}0713$	A I/II Einfache, bekannte Rechnung im Sach-zusam-menhang
1.2	Zufallsexperiment: Bernoullikette mit n = 125 und Treffer : = „Person raucht täglich“, p = 0,25, X := „# Treffer“ ist $B_{125;\,0,25}$-verteilt. E(X) = np = 31,25; $\sigma = 4{,}84 > 3 \Rightarrow \sigma - \text{Regel anwendbar.}$ 90%: daraus folgt mit Hilfe der Tabelle c=1,64 => der 90%-Bereich ist $[31{,}25 - 1{,}64 * 4{,}84;\ 31{,}25 + 1{,}64 * 4{,}84]_{\mathbb{N}}$ = … = {23; … ; 69}.	A I/II
1.3	Zufallsexperiment: Bernoullikette mit n = 125 und Treffer : = „Person hat Erfahrung mit dem Rauchen“, p = 0,7, X := „# Treffer“ ist $B_{125;\,0,7}$-verteilt. E(X) = 87,5; σ = 5,12 > 3 => Formel von Moivre-Laplace ist anwendbar: P(72< X < 100) = P(73 $\leq$ X $\leq$ 99) $\approx$ $\Phi\left(\frac{99+0{,}5-87{,}5}{5{,}12}\right) - \Phi\left(\frac{73-0{,}5-87{,}5}{5{,}12}\right) \approx \Phi(2{,}34) - \Phi(-2{,}93) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 0{,}9904 - 0{,}0017 = 0{,}9887$.	A I/II
2.1	Zufallsexperiment: Bernoullikette mit n = 110 und Treffer : = „Person raucht täglich“, p = 0,25, X := „# Treffer“ ist $B_{110;\,0,25}$-verteilt. E(X) = 27,5; σ = 4,5 > 3 => Formel von Moivre-Laplace ist anwendbar: Fehler 1. Art: Hypothese H_0 wird irrtümlich abgelehnt Text: Ablehnungsbereich A = {26; … ; 110} bei rechtsseitigem Test => H_0: p $\leq$ 0,25 => P(Fehler 1. Art) = $P_{0,25}$(26 $\leq$ X $\leq$ 110) $\approx$ $1 - \Phi\left(\frac{26-0{,}5-27{,}5}{4{,}5}\right) \approx 1 - \Phi(-0{,}44) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 1 - 0{,}3300 = 0{,}6700$. Max nimmt in Kauf, dass er sich in 67 % aller Fälle irrtümlich gegen p $\leq$ 0,25 entscheidet, wenn er den Test häufig durchführt.	A II/III Anwen-dung von Fach-begriffen im Sach-zusam-menhang

2.2	Zufallsexperiment: Bernoullikette mit n = 110 und Treffer : = „Person raucht täglich“, p = 0,25, X := „# Treffer“ ist $B_{110;\,0,25}$-verteilt. E(X) = 27,5; σ = 4,5 > 3 => Formel von Moivre-Laplace ist anwendbar: H_1: p < 0,25 => H_0: p $\geq$ 0,25 => p_0 = 0,25 H_0 wird für kleine k abgelehnt => linksseitiger Test Ansatz: P(X $\leq$ K) $\leq$ 3% = 0,03 $\overset{\text{FML}}{\Leftrightarrow} \Phi\left(\frac{K+0,5-27,5}{4,5}\right) \leq 0,03 \quad \overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} \frac{K-27}{4,5} \leq -1,89 \Rightarrow K \leq 18,50$. Testanleitung: - Befrage 110 Schülerinnen und Schüler. - Lehne H_0 ab, falls höchstens 18 davon täglich rauchen. In diesem Fall kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 3 % davon ausgegangen werden, dass am HSG weniger als 25 % der Schülerinnen und Schüler täglich rauchen. - Nimm H_0 an, wenn mehr als 18 täglich rauchen.	A II
3.1	geg.: h = 55/200; γ = 0,90; n = 200 ges.: Vertrauensintervall Lsg.: Ansatz: $P(\lvert h-p\rvert \leq r) \geq 0,9$ (*) Nähere P mit Hilfe der Gaußschen Summenfunktion an (n groß): $\Phi\left(\frac{nr}{\sigma}\right) \approx \frac{1+0,9}{2} = 0,95; \quad \sigma = \sqrt{200p(1-p)}$ Daraus ergibt sich mit Hilfe der Tabelle: $\frac{nr}{\sigma} \approx 1,6449 \quad \Leftrightarrow \quad nr \approx 1,6449 \cdot \sqrt{200p(1-p)}$. Durch Einsetzen in (*) und Multiplikation mit 200 erhält man: $0 \leq \lvert 55-200p\rvert \leq 1,6449 \cdot \sqrt{200p(1-p)} \quad \Leftrightarrow$ $3025 - 22000p + 40000p^2 \leq 541,14p(1-p) \quad \Leftrightarrow$ $40541,1392p^2 - 22541,1392p + 3025 \leq 0$. Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion: $p_1 \approx 0,23 \quad p_2 \approx 0,33$. Ergebnis: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% liegt der tatsächliche Anteil der täglichen Raucher bei 23 % und 33 %.	A III
3.2	Man darf den im Unterricht hergeleiteten Satz benutzen: geg.: γ = 0,99; d = 0,1 ges.: n Lsg.: $\Phi(c) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad c = 2,57558 \quad$ => $\quad n \geq \left(\frac{c}{d}\right)^2 \approx 663,36$. Es müssen mindestens 664 Jugendliche befragt werden, damit das Vertrauensintervall zu γ = 0,99 höchstens die Länge 0,1 hat. Daher reicht es aus, 700 Schülerinnen und Schüler zu befragen.	A I

5.3.4 Beispiel für einen Abiturvorschlag zur Stochastik

Stochastik GF und LF: Der Schulfotograf	St.-Franziskus-Gymnasium und -Realschule Kaiserslautern, Abitur 2007
Erlaubte Hilfsmittel: Excel, Taschenrechner, Formelsammlung	
Im Oktober wurden die Schülerinnen[25], Lehrerinnen und Lehrer vom Schulfotografen fotografiert. Diesmal konnte jede Schülerin aus folgenden fünf Angeboten auswählen: I) nur Schülerausweis (kostenlos) II) Schülerausweis + Klassenfoto (für 3,40 €) III) Schülerausweis + Passfotos (für 4,50 €) IV) Schülerausweis + Klassenfoto + Passfoto (für 6,80 €) V) wie IV) + Schlüsselanhänger und 13x18-Abzug (für 9,90 €) Von den Schülerinnen des Gymnasiums bestellten 121 das Paket I, 182 das Paket II, 101 das Paket III, 302 das Paket IV und 292 das Paket V.	
1	Die Zufallsvariable X beschreibe den Betrag, den eine zufällig ausgewählte Schülerin bezahlen muss.
1.1 LF/GF	Erstellen Sie aus den Angaben des Textes eine Verteilung für X in Excel und veranschaulichen Sie diese mit einem Säulendiagramm.
1.2 LF/GF	Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
1.3 LF/GF	Um Verwaltungsaufwand zu reduzieren, schlägt der Fotograf der Schulleitung vor, dass die Klassensprecherinnen das Geld für die ganze Klasse einsammeln sollen. Wie würden Sie entscheiden? Geben Sie in Ihrer Begründung auch mathematische Überlegungen an.
2	Der Fotograf behauptet, dass am SFG die Lehrer besonders beliebt sind, denn es werden mehr Lehrerfotos von Schülerinnen gekauft als an anderen Schulen. Erfahrungsgemäß kaufen 45 % der Schülerinnen und Schüler ein Lehrerfoto.
2.1 GF	Entwickeln Sie einen Hypothesentest zu dieser Fragestellung mit dem Signifikanzniveau 5 %. Was sagen Sie dem Fotografen, wenn 497 Schülerinnen ein Lehrerfoto gekauft haben?
2.2 LF	Entwickeln Sie einen Hypothesentest zu dieser Fragestellung mit dem Signifikanzniveau 5 %. Erstellen Sie eine Tabelle mit Excel, aus der Sie die benötigten Wahrscheinlichkeiten ablesen können. Was sagen Sie dem Fotografen, wenn 471 Schülerinnen ein Lehrerfoto gekauft haben?

[25] Hier handelt es sich um ein Mädchen-Gymnasium

3	Das Interesse an Lehrerfotos ist bei den Jahrgangsstufen des Gymnasiums unterschiedlich. In der Orientierungsstufe kauften 60 % der 315 Schülerinnen ein Lehrerfoto. Von den Schülerinnen aus den Klassen 7 bis 13 kauften 375 kein Lehrerfoto. (Beachten Sie noch die Angaben in Aufgabenteil 1)
3.1 LF/GF	Stellen Sie die Angaben anschaulich dar und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine im Mathematikunterricht zufällig aufgerufene Schülerin der Klasse 9b ein Lehrerfoto gekauft hat.
3.2 LF	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in der Umkleidekabine der Turnhalle gefundenes Lehrerfoto einer Schülerin der Orientierungsstufe gehört?
4	An den Tischen im Aufenthaltsraum für Sekundarstufe I und Sekundarstufe II wird über das Lehrerfoto diskutiert.
4.1 LF/GF	Berechnen Sie schriftlich die Wahrscheinlichkeit, dass von den 6 Freundinnen an einem Tisch genau 4 ein Lehrerfoto besitzen.
4.2 LF	Wie groß muss die Zahl der Schülerinnen an einem Tisch mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine von ihnen kein Lehrerfoto besitzt, größer als 99 % ist? Rechnen Sie schriftlich.

Analyse

Die Differenzierung zwischen Grund- und Leistungsfachanforderungen besteht zum einen in den unterschiedlichen Teilaufgaben 2.1 und 2.2 (einseitiger Hypothesentest mit unterschiedlicher Interpretationsnotwendigkeit D3, D5[26]) und zum anderen darin, dass für das Grundfach die Teile 3.2 und 4.2 entfallen (D6).

1.1 Die Schülerinnen und Schüler machen sich mit dem Modell vertraut, berechnen (K4) und veranschaulichen die Wahrscheinlichkeitsverteilung (K2) und verwenden Hilfsmittel sachangemessen (K9).

1.2 Lösen im gewählten Modell (K4)

1.3 Sie interpretieren und bewerten die Ergebnisse im Ausgangskontext (K4).

2.1 Mathematisches Modellieren, Beschreiben der Ausgangssituation, der Modellannahme sowie Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4); Erläutern von Verfahren (K5)

2.2 Mathematisches Modellieren, Beschreiben der Ausgangssituation, der Modellannahme, Lösen im gewählten Modell sowie Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext (K4); Erläutern von Verfahren (K5) und sachangemessene Nutzung von Hilfsmitteln (K9)

3.1 Veranschaulichen und Beschreiben mathematischer Sachverhalte mit Hilfe von Vierfeldertafel, Baumdiagramm (K2).

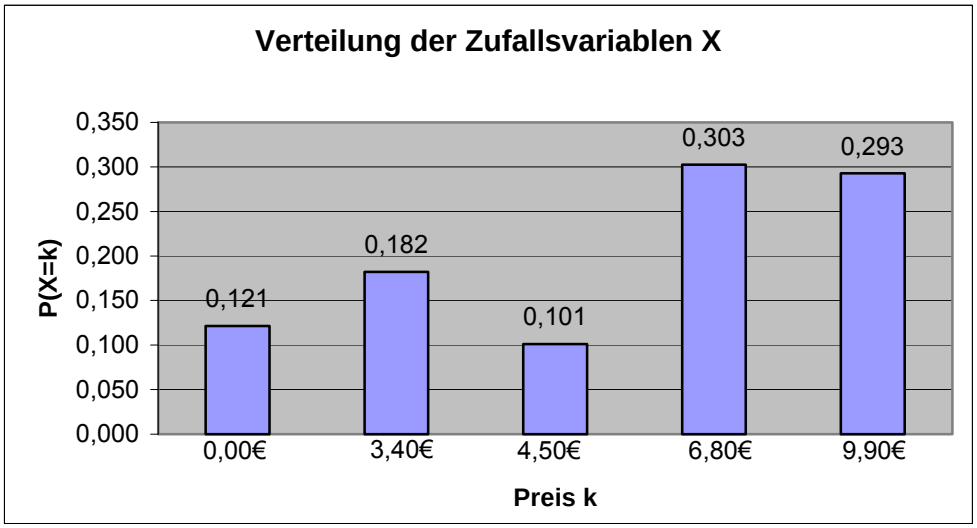
3.2 Sachgerechtes Umgehen mit grundlegenden Sätzen (K3).

4.1 Mathematisches Modellieren, hier Mathematisieren (K4)

4.2 Mathematisches Modellieren, hier Lösen im gewählten Modell und Interpretieren der Ergebnisse (K4)

[26] Siehe Bezeichnung Seite 13

Lösungen

<table>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><th>Paket</th><th>Anzahl</th><th>Preis k</th><th>P(X=k)</th><th>k*P(X=k)</th></tr>
<tr><td>I</td><td>121</td><td>0,00 €</td><td>0,121</td><td>0,000 €</td></tr>
<tr><td>II</td><td>182</td><td>3,40 €</td><td>0,182</td><td>0,620 €</td></tr>
<tr><td>III</td><td>101</td><td>4,50 €</td><td>0,101</td><td>0,455 €</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>302</td><td>6,80 €</td><td>0,303</td><td>2,058 €</td></tr>
<tr><td>V</td><td>292</td><td>9,90 €</td><td>0,293</td><td>2,897 €</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>998</td><td></td><td>1,000</td><td>6,030 €</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Erwartungswert</td></tr>
</table>
</td><td>EPA
A I,II</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td> 
</td><td>A I, II</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Die Zahl der Schülerinnen pro Klasse in der Orientierungsstufe liegt zwischen 25 und 30. Im Schnitt müssten 150 bis 210 Euro pro Klasse eingesammelt werden. Bei der Orientierungsstufe werden wohl mehr teure Pakete gekauft, also wird der Betrag eher noch größer sein. Eine Klassensprecherin der Orientierungsstufe kann so viel Geld nicht einsammeln. Bei MSS-Kursen mit geringerer Schülerzahl und vermutlich weniger teuren Paketen kann man den Vorschlag akzeptieren.</td><td>A III</td></tr>
</table>

2.1 Einseitiger Test mit H_0: $p \le 0,45$ $H_1: p > 0,45$; n=998; σ =15,72; c= 1,64 bei einseitigem Test; Annahmebereich A=[0; μ + σ*c] = [0; 476] — A II

2.2 Einseitiger Test

$H_0: p \le 0,45$; $H_1: p > 0,45$; n=998;

Annahmebereich A[0;r], Ablehnungsbereich [r+1;n]

Binomialverteilung, Tabelle mit Excel,
Ablesung: r = 475, Annahmebereich A=[0,475]

(andere Lösung als in 2.1 denkbar)

Die Gegenhypothese zur Aussage des Fotografen kann nicht mit hinreichender Sicherheit verworfen werden. Die Beobachtung des Fotografen kann auch mit Zufall erklärt werden.

Binomialverteilung in Excel

k	P(X<=k)
470	0,91321655
471	0,92281984
472	0,93159266
473	0,93957469
474	0,94680811
475	0,95333688
476	0,95920605
477	0,96446111

A II

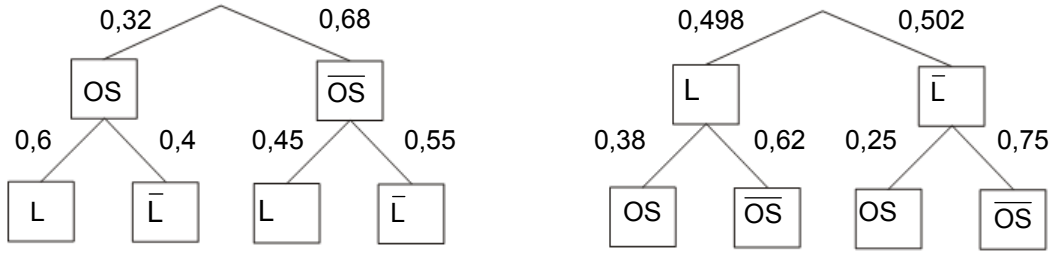
3.1 A I - II

Vierfeldertafel

	L	$\overline{L}$	
OS	189	126	315
$\overline{OS}$	308	375	683
	497	501	998

Vierfeldertafel

	L	$\overline{L}$		
OS	0,189	0,126	0,315	
$\overline{OS}$	0,309	0,376	0,685	
	0,498	0,502	1	



$p_{\overline{OS}}(L) = \frac{308}{683} \approx 0,45$

3.2 Satz von Bayes liefert die bedingte Wahrscheinlichkeit: $p_L(OS) = \frac{189}{497} \approx 0,38$ — A II

Das gefundene Lehrerfoto gehört mit einer Wahrscheinlichkeit von 38 % einer Schülerin der Orientierungsstufe.

4.1 Z sei die Anzahl der Freundinnen mit Lehrerfoto. Genau 4 Lehrerfotos an einem Tisch können auf $\binom{6}{4} = 15$ verschiedene Arten vorhanden sein. Mit $p = \frac{308}{683}$ und $q = \frac{375}{683}$ berechnet sich P(Z=4) = $\binom{6}{4} p^4 q^2 \approx 0,185$. — A II

4.2 Berechnung über das Gegenereignis: $1 - 0,45^n \ge 0,99$ liefert durch Logarithmieren $n \ge 5,7$; also n = 6. — A III

5.4 Aufgaben, die unterschiedliche mathematische Themenbereiche miteinander verbinden

Gebiets- bzw. themenübergreifende Aufgaben bieten sich z. B. an, wenn Anwendungsbezüge oder Vernetzungen thematisiert werden sollen. Zum Anforderungsbereich III gehört z. B. das Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde (EPA).

5.4.1 Lineare Algebra – Analysis

In einem Unternehmen gibt es drei Zweigwerke A, B und C, deren Produktionen untereinander und mit dem Markt verflochten sind. Die Inputmatrix M und der Produktionsvektor sind von einem Technologieparameter $t \in [16;22]$ abhängig. Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 2-0,004t & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,02(t-8) & 0,7 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 40t \\ 10t \\ 12t \end{pmatrix}.$$

Für welchen Wert von t ist die für den Markt produzierte Gesamtmenge am größten?

Lösung

Für den Produktionsvektor $\vec{x}$ und den Marktvektor $\vec{v}$ gilt:

$$\vec{x} = M \cdot \vec{x} + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = (E - M) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,04t^2 + 0,4t \\ 0,8t \\ -0,2t^2 + 5,2t \end{pmatrix}.$$

Die Marktabgabefunktion ist dann $f(t) = 0,04\,t^2 + 0,4\,t + 0,8\,t - 0,2\,t^2 + 5,2\,t = -0,16\,t^2 + 6,4\,t$.

Das Maximum liegt bei $t = 20$ und es gehen 64 Einheiten an den Markt.

5.4.2 Lineare Algebra – Analysis

In der folgenden Aufgabe soll die Lösungsmenge $U_{a,b}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \qquad (a \in \mathfrak{R} \text{ und } b \in \mathfrak{R})$$

untersucht werden.

1. Bekanntlich bildet die Menge aller reellen Funktionen mit $D_f = \mathfrak{R}$ einen Vektorraum bezüglich der Ordinatenaddition und -multiplikation.

   Beweisen Sie, dass die Menge $U_{a,b}$ bezüglich dieser Verknüpfungen ebenfalls einen Vektorraum bildet.

2. Welche Bedingung muss der Parameter k erfüllen, damit die Funktion $f(x) = e^{kx}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist? (Zur Kontrolle: $k^2 + ak + b = 0$)

3. Geben Sie für a = -2 und b = 1 eine mögliche Lösung an und konstruieren Sie mit dem Ansatz $f(x) = g(x) \cdot e^x$ weitere Lösungen, indem Sie eine passende Funktion g(x) ermitteln.

   Begründen Sie kurz, dass sich mit Hilfe der Aussage zu 1. unendlich viele Lösungen konstruieren lassen. Wie könnte der allgemeine Bauplan aller Lösungen aussehen und welche Dimension hat dieser Lösungsraum?

4. Es sei nun a = 1 und b = -6.

   a) Geben Sie zwei e-Funktionen mit verschiedenen Exponenten an, die Lösungen dieser Differentialgleichung sind und zeigen Sie, dass für die Lösungsmenge $U_{1,-6}$ gilt: $\dim U_{1,-6} \geq 2$.

   b) Konstruieren Sie mit den Ergebnissen aus 4a) eine Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen f(0) = 4 und f'(0) = 3 genügt.

Lösungen

$V:=\{ f \mid f''(x)+a\cdot f'(x)+b\cdot f(x)=0 \; ; D_f=\mathbb{R} \; ; a,b \in \mathbb{R} \}$

1. Wegen $[f(0)=0]\in V$ ist $V\neq\{\ \}$
   Da V Teilmenge eines Vektorraums ist, müssen nur die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition und der S-Multiplikation nachgewiesen werden:
   (1) $f,g\in V$: $(f+g)''+a\cdot(f+g)'+b\cdot(f+g) = f''+g''+a\cdot f'+a\cdot g'+b\cdot f+b\cdot g$
   $= f''+a\cdot f'+b\cdot f+g''+a\cdot g'+b\cdot g = 0+0 = 0$; also $(f+g)\in V$.
   (2) $f\in V; k \in \mathbb{R}$: $(k\cdot f)''+a\cdot(k\cdot f)'+b\cdot(k\cdot f) = k\cdot f''+a\cdot k\cdot f'+b\cdot k\cdot f = k\cdot(f''+a\cdot f'+b\cdot f) = 0$
   also $(k\cdot f) \in V$.

2. $(e^{kx})''+a\cdot(e^{kx})'+b\cdot e^{kx} = e^{kx}\cdot(k^2+ak+b)$; da $e^{kx}\neq 0$ lautet die Bedingung $k^2+ak+b=0$.

3. Aus $k^2+2k+1 = 0$ folgt $k=1$, also $f(x)= e^x\in U_{-2;1}$.
   Damit $g(x)\cdot e^x$ eine Lösung ist, muss gelten
   $0 = (g\cdot e^x)''-2\cdot(g\cdot e^x)'+(g\cdot e^x) = (g'\cdot e^x + g\cdot e^x)'-2(g'\cdot e^x + g\cdot e^x)+g\cdot e^x$
   $= g''\cdot e^x+g'\cdot e^x+g'\cdot e^x+g\cdot e^x-2 g'\cdot e^x-2g\cdot e^x+g\cdot e^x = g''\cdot e^x$

Wegen $e^x\neq 0$ ist g eine lineare Funktion: $g(x)=c\cdot x+d$; $c,d \in \mathbb{R}$ und es gibt weitere Lösungen der Form $f(x)=(c\cdot x+d)\cdot e^x$. Da $x\cdot e^x$ und e^x linear unabhängige Elemente von $U_{-2;1}$ sind, beträgt die Dimension mindestens 2.

4.

a) Aus $k^2+k-6 = 0$ folgt $k_1 = -3$ und $k_2 = 2$, somit sind $f(x) = e^{-3x}$ und $g(x) = e^{2x}$ Lösungen.
   f und g sind linear unabhängig:
   $0 = r\cdot f(x) + s\cdot g(x) = r\cdot e^{-3x}+s\cdot e^{2x} = e^{-3x}\cdot(r+s\cdot e^{5x})$
   Wegen $e^{kx}>0$ ist die Gleichung nur lösbar für $r = 0$ und $s = 0$, also ist $\dim U_{1;-6} \geq 2$.

b) $f(x) = r\cdot e^{-3x}+s\cdot e^{2x}$; $f'(x) = -3r\cdot e^{-3x}+2s\cdot e^{2x}$ daraus ergibt sich
   $f(0) = r+s = 4$ und $f'(0) = -3r + 2s = 3$ mit den Lösungen $r = 1$ und $s = 3$, also $f(x) = e^{-3x} + 3\cdot e^{2x}$.

5. Aus $k^2-4k+5 = 0$ folgt $k_1=2+i$ und $k_2=2-i$, also sind $f_1(x)=e^{(2+i)\cdot x}$ und $f_2(x)=e^{(2-i)\cdot x}$ Lösungen. Da sie linear unabhängig sind (analog zu 4.a)) und $\dim U_{-4;5}=2$, bilden sie eine Basis und die allgemeine Form der Lösung lautet $f(x) = c_1\cdot e^{k_1 x} + c_2\cdot e^{k_2 x}$ mit $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$.

6. Die Gleichung charakterisiert die Lösungsmenge. Die Struktur der Lösung hängt von der Diskriminante $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ ab.
   1. D>0: $f(x) = c_1\cdot e^{k_1 x} + c_2\cdot e^{k_2 x}$ mit $k_1,k_2 \in \mathbb{R}$
   2. D=0: $f(x) = (c\cdot x + d)\cdot e^{k\cdot x}$
   3. D<0: $f(x) = c_1\cdot e^{k_1 x} + c_2\cdot e^{k_2 x}$ mit $k_1,k_2 \in \mathbb{C}$

5.4.3 Analytische Geometrie – Analysis

Gegeben sind die Punkte A(1|2|3), B(1|3|5) und P(3|5|4). Die Gerade g geht durch die Punkte A und B. Bestimmen Sie den Abstand von P zu einem beliebigen Punkt Q_t auf g. Für welchen Punkt Q_t ist dieser Abstand am kleinsten? Berechnen Sie den Punkt Q_t und den Abstand.

Lösung

$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$; Abstand P und Q_t: $d(t) = \sqrt{5t^2 - 10t + 14}$,

daraus folgt $d'(t) = \frac{10t-10}{2\sqrt{5t^2-10t+14}}$, also t = 1. Somit ist der gesuchte Punkt $Q_1(1|3|5)$ und der Abstand beträgt 3 LE.

5.4.4 Analysis – Analytische Geometrie

Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ rotiert um die x-Achse.

a) Version 1: Beschreiben Sie die Oberfläche dieses Rotationskörpers in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem durch eine entsprechende Gleichung.

   Version 2: Begründen Sie, dass man die Oberfläche dieses Rotationskörpers in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem durch die Gleichung $x-y^2-z^2=0$ beschreiben kann.

b) Verschieben Sie den Rotationskörper in z-Richtung um eine Einheit und geben Sie die Gleichung für die Schnittkurve mit der xy-Ebene an.

Lösung

a) Der Schnitt parallel zur yz-Ebene an der Stelle x ist ein Kreis um den Durchstoßpunkt der x-Achse mit dem Radius f(x).

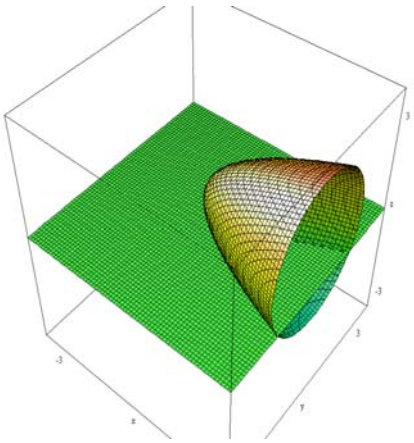
   Also gilt $f(x)^2 = y^2 + z^2$ und mit $f(x) = \sqrt{x}$ folgt $x = y^2 + z^2$ bzw. $x - y^2 - z^2 = 0$.

b) Um den Körper zu verschieben, muss man z durch (z-1) ersetzen. Die neue Gleichung lautet:

   $x - y^2 - (z-1)^2 = 0$.

   Den Schnitt mit der xy-Ebene erhält man für z=0, also lautet die Gleichung:

   $x - y^2 - 1 = 0$ oder $y^2 = x - 1$.



5.4.5 Analysis – Stochastik

Bei der Untersuchung von Wartezeiten vor Bankschaltern stellt man fest, dass diese durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben werden können, die proportional zu $f(x) = x \cdot e^{-0.5x}$ ist. Dabei gibt x die Wartezeit in Minuten an.

a) Berechnen Sie die Dichtefunktion d(x). [Zur Kontrolle: $d(x) = \frac{1}{4} x \cdot e^{-0,5x}$]

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit von mehr als 5 Minuten?

c) Für welches 1-Minuten-Intervall ist die Wahrscheinlichkeit am größten?

d) Wie groß ist die mittlere Wartezeit?

oder

e) Für eine Abschätzung der mittleren Wartezeit gibt es folgenden Vorschlag:

Die Wahrscheinlichkeit für längere Wartezeiten als 10 Minuten ist 4 % – das kann man vernachlässigen. Im Bereich bis 10 Minuten ist die mittlere Wartezeit dann $\frac{10\,\text{min}}{2} * 0,96 = 4,8\,\text{min}$.

Nehmen Sie Stellung zu diesem Vorschlag.

Lösungsskizze

a) $\int x \cdot e^{-0,5x} dx = -(2x+4)e^{-0,5x}$, also gilt $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a x \cdot e^{-0,5x} dx = 4$.

Wegen der Normierung ist $d(x) = \frac{1}{4} f(x) = \frac{1}{4} x \cdot e^{-0,5x}$.

b) $1 - \int_0^5 x \cdot e^{-0,5x} dx \approx 0,29$

c) die Wahrscheinlichkeit für ein 1-Minuten-Intervall beginnend bei t ist

$$\int_t^{t+1} d(x)dx = D(t+1) - D(t).$$

Zur Bestimmung des Hochpunktes muss man die Ableitung gleich Null setzen:
$0=[D(t+1)-D(t)]'=d(t+1)-d(t)=\frac{1}{4}(t+1) \cdot e^{-0,5(t+1)} - \frac{1}{4}(t) \cdot e^{-0,5(t)} = t \cdot (e^{-0,5} - 1) + e^{-0,5}$,

also $t = \frac{1}{e^{0,5} - 1} \approx 1,54$. Das gesuchte Minutenintervall ist dann [1,54;2,54] .

d) Für den Erwartungswert im Intervall [0;∞] gilt $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a x \cdot d(x)dx = \lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a x^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-0,5x} dx = 4$

oder $\int_0^{10} x \cdot d(x)dx = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-0,5x} dx \approx 3,5$.

6 Das mündliche Abitur

„Es kann nur geprüft werden, was auch behandelt wurde.“ Diese bereits in Kapitel 3 erwähnte Feststellung ist insbesondere aus methodischer Sicht für das mündliche Abitur von Bedeutung. Anders als die schriftliche Abiturprüfung, die letztlich eine Art erweiterte Kursarbeit darstellt, ist die mündliche Prüfung eine Form des Leistungsnachweises, die im Unterricht erheblich seltener vorkommt. Deshalb sollten bereits frühzeitig Gelegenheiten wie Referate oder Präsentationen von Haus- bzw. Gruppenarbeiten genutzt werden, um wichtige Merkmale und Techniken eines guten Vortrags, der über ein bloßes Vorrechnen oder gar ein stummes Anschreiben von Ergebnissen hinausgeht, zu thematisieren und bewusst zu machen.

6.1 Grundlagen

Zunächst werden kurz die für die mündliche Prüfung relevanten Teile aus den EPA und dem Rundschreiben zusammengestellt.

6.1.1 Aufgabenstellung

In der mündlichen Prüfung sollen die Prüflinge zeigen, dass sie über mathematische Sachverhalte in freiem Vortrag berichten und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen können. Sie sollen insbesondere nachweisen, in welchem Umfang sie

- einen Überblick über grundlegende Sätze, Begriffe und Verfahren der Mathematik besitzen,
- Verständnis für mathematische Denk- und Arbeitsweisen haben,
- Einblick in mathematische Problemstellungen und Ergebnisse gewonnen haben.[27]

Um in der zur Verfügung stehenden Zeit diese Kompetenzen überprüfen zu können, muss sich die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung grundsätzlich von der für die schriftliche Prüfung unterscheiden.[27] Im Vordergrund soll die Darstellung und Begründung von Sachverhalten und Verfahren stehen. In der Prüfung ist der Nachweis verschiedener fachlicher und methodischer Kompetenzen zu fordern. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden.

Einerseits bieten sich dazu an:

- die Nutzung geeigneter Werkzeuge zur Erarbeitung der Lösungen (z. B. Taschenrechner, Software, Fachliteratur),
- der Einsatz von Hilfsmitteln zur Präsentation der Lösungswege und Ergebnisse (z. B. Folien, Displays, Modelle).

Andererseits sind Aufgabenstellungen besonders geeignet, die Teilaufgaben enthalten, die sich auf eine Erläuterung des Lösungsweges beschränken, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind, oder bei denen Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgegeben sind, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.[28]

[27] EPA, a. a. O. Abschnitt 4 : Mündliche Prüfung, Seite 27
[28] EPA, a. a. O. Abschnitt 4.1: Besonderheiten und Aufgabenstellung, Seite 27

Die mündliche Prüfung stützt sich auf mindestens zwei Prüfungsaufgaben, die dem Prüfling schriftlich vorgelegt werden. Der Umfang der vom Prüfling vorzubereitenden Aufgaben sowie der zugehörigen Texte und Materialien muss der Dauer der Vorbereitungszeit, im Regelfall 20 Minuten, Rechnung tragen. Aufgabenstellung und Materialien sind dem Prüfling in angemessener Form vorzulegen.[29]

Aufgaben, die sich in Teilaufgaben zunehmend öffnen, bieten dem Prüfling eine besondere Chance, den Umfang seiner Fähigkeiten und die Tiefe seines mathematischen Verständnisses darzustellen. Für den Prüfungsausschuss ermöglichen sie die differenzierte Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Prüflings.

Die Prüfungsaufgabe muss einen einfachen Einstieg erlauben. Sie muss andererseits so angelegt sein, dass in der Prüfung unter Beachtung der Anforderungsbereiche (vgl. 2), die auf der Grundlage eines Erwartungshorizontes zugeordnet werden, grundsätzlich jede Note erreichbar ist.[30]

Die Themen für die mündliche Prüfung müssen aus unterschiedlichen Sachgebieten der Lehrpläne ausgewählt werden, die in der Qualifikationsphase behandelt wurden. Sie müssen aus mindestens zwei der vier Abschnitte der Qualifikationsphase (11/2, 12/1, 12/2 und 13) stammen. Es ist nicht gestattet, im Vorfeld der Prüfung in Absprache mit dem Prüfling den Stoff eines Abschnittes auszuschließen. Die Verabredung einer Schwerpunktbildung ist jedoch möglich, diese sollte aber nicht zu eng gefasst werden. Grundsätzlich sind Aufgaben, die im Unterricht so weit behandelt wurden, dass ihre Lösung keine selbstständige Leistung mehr darstellt, nicht zulässig.[31]

6.1.2 Prüfungsgespräch

Zur mündlichen Prüfung gehört, dass dem Prüfling ausreichend Gelegenheit gegeben wird, die von ihm vorbereiteten Lösungen der Prüfungsaufgaben zusammenhängend vorzutragen, sich aber ein an die vorgelegten Aufgaben anknüpfendes Prüfungsgespräch anschließt.

Beim Vortrag der vorbereiteten Lösungen entsprechen ein bloßes Ablesen der Aufzeichnungen aus der Vorbereitung und eine nicht auf das Thema bezogene Wiedergabe gelernten Wissens nicht dem Zweck der Prüfung.

Das Prüfungsgespräch ist so zu führen, dass zum einen noch offene Fragen aus den gestellten Prüfungsaufgaben geklärt werden, zum anderen soll das Gespräch Gelegenheit geben, die Themenstellung zu vertiefen und zu erweitern, wobei größere fachliche und überfachliche Zusammenhänge zu berücksichtigen sind. Das alleinige Abfragen von Detailkenntnissen und Fakten wird dem Ziel der Prüfung nicht gerecht.[32]

---

[29] Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung vom 30.05.2008, Seite 7
[30] EPA , a. a. O., Seite 24, 4.1 letzter Absatz
[31] Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung vom 30.05.2008, Seite 6.
[32] Rundschreiben zur Abiturprüfungsordnung vom 30.05.2008, Seite 7

6.1.3 Bewertung

Bei der Bewertung der Leistungen in der mündlichen Prüfung sind neben den fachlichen Anforderungen folgende Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

- der Grad der Selbständigkeit und der Umfang notwendiger Hilfen,
- die Fähigkeit des Prüflings, einen Sachverhalt zusammenhängend und sachgerecht darzustellen, auf mündliche Fragen und Einwände einzugehen und selbst weitergehende Überlegungen in das Prüfungsgespräch einzubringen,
- die Fähigkeit des Prüflings zu analysieren, zu differenzieren und zu relativieren.

Liegen der Prüfung mehrere Aufgaben oder Aufgabenteile zu Grunde, ist deren zeitlicher Anteil an der Prüfung bei der Bewertung zu berücksichtigen.
Es ist darauf zu achten, dass die Aussagen des Protokolls das Ergebnis der Bewertung nachvollziehbar erkennen lassen und der für die Prüfung festgesetzten Note nicht widersprechen.[33]

6.2 Planung und Durchführung der Prüfung

Die Schülerinnen und Schüler sollten frühzeitig über den Modus der mündlichen Prüfung informiert werden. In der Praxis hat es sich bewährt, die o. g. Schwerpunktbildung so zu realisieren, dass der Prüfling sich eines der drei möglichen Gebiete (Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Stochastik) aussucht, aus dem dann eine der Prüfungsaufgaben gewählt wird. Darüber hinaus wird jedoch mindestens eines der beiden anderen Gebiete geprüft, dessen Auswahl der Prüfling vorher nicht kennt.

Es ist günstig, die Aufgabe möglichst offen zu formulieren und dabei zu beachten, dass

- auch ein schwacher Prüfungskandidat einen Einstieg finden kann,
- die Aufgabe genügend Tiefe ermöglicht, um auch den oberen Notenbereich zu erreichen,
- die Aufgabe in der zur Verfügung stehenden Vorbereitungszeit von etwa 10 Minuten sinnvoll bearbeitet werden kann,
- ein freier Vortrag von etwa 4-5 Minuten ermöglicht wird.

Bei jeder Prüfungsaufgabe besteht der erste Teil aus einem freien Vortrag des Prüflings, bei dem er möglichst nicht unterbrochen werden sollte. Fehler oder unklare Darstellungen werden im anschließenden Prüfungsgespräch aufgegriffen. Um einen oberen Notenbereich zu rechtfertigen, sollte der Prüfling darüber hinaus auch auf Zusatzfragen, die weiterführende bzw. übergreifende Zusammenhänge betreffen, eingehen können. Es ist günstig, eine Auswahl von Zusatzfragen unterschiedlichen Anforderungsniveaus vorzubereiten, um je nach vorhergehendem Prüfungsverlauf unterschiedliche Notenbereiche ansteuern zu können. Insofern sind in den folgenden Beispielen die Zusatzfragen immer als mögliche Optionen gedacht, aus denen die Prüferin oder der Prüfer gezielt und flexibel auswählen kann.

Wird ersichtlich, dass der Prüfling ein Problemfeld nicht verstanden hat und trotz kleinerer Hilfen nicht weiterkommt, sollte dies nicht weiter vertieft, sondern ihm stattdessen die Gelegenheit gegeben werden, an anderer Stelle sein Können zu beweisen.

[33] Rundschreiben a.a. O., Seite 7

6.3 Aufgabenbeispiele

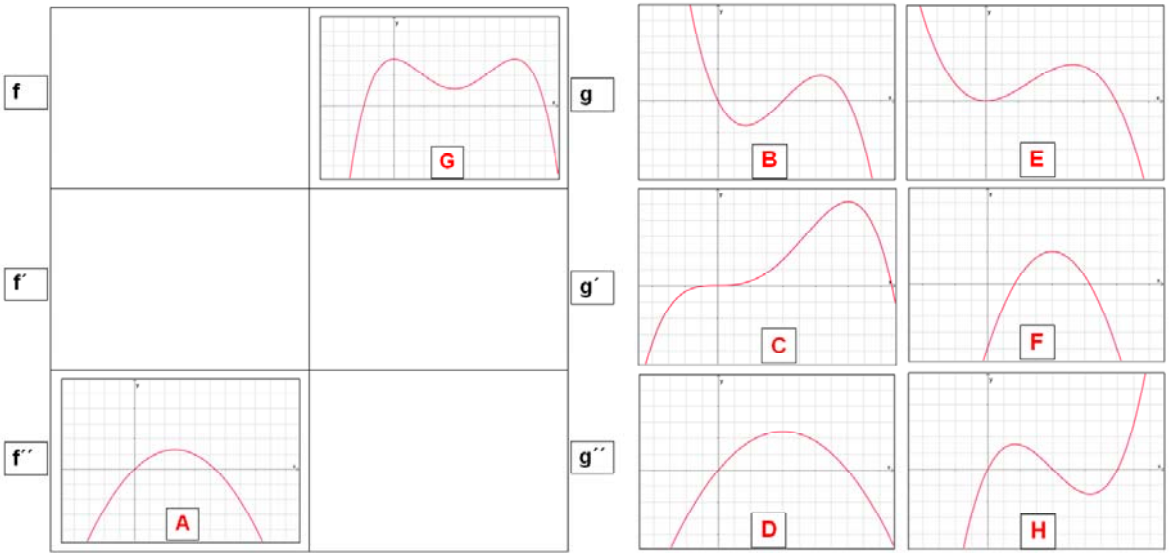
Bei allen Aufgaben sind eine Formelsammlung sowie ein nicht grafikfähiger Taschenrechner zugelassen. Um wertvolle Prüfungszeit zu sparen, empfiehlt es sich, den Prüfling bereits in der Vorbereitung auf Folien arbeiten zu lassen, die ggf. bereits mit Skizzen, Koordinatensystemen etc. versehen sind. Auch im Prüfungsgespräch können Fragen oder Impulse übersichtlich und schnell mit Hilfe vorbereiteter Folien präsentiert werden.

6.3.1 Analysis: Funktionen – Ableitungen – Graphen

Aufgabenstellung

In der beigefügten Tabelle sollen die Graphen der Funktionen f und g sowie deren erste und zweite Ableitung dargestellt werden. Die Graphen von f´´ und g sind bereits vorhanden. Unter den 6 beigefügten Bildern befinden sich die fehlenden Graphen. Finden Sie diese heraus und kleben Sie sie an die richtigen Stellen in der Tabelle. Die Beschriftung der Bilder ist rein zufällig und hat nichts mit der Reihenfolge in der Tabelle zu tun. Stellen Sie möglichst viele Zusammenhänge zwischen den Graphen einer Spalte her und erläutern Sie diese.

Material



Mögliche Zusatzfragen

- Betrachten Sie den Graphen B der Funktion g ’(x). Eine Einheit entspricht zwei Kästchen. Schätzen Sie den Wert des Integrals $\int_0^3 g'(x)\,dx$ ab.
- Interpretieren Sie g als Flächenfunktion und erläutern Sie Ihre Überlegungen an den Graphen von g und g '.
- Bei g handelt es sich um eine ganzrationale Funktion. Stellen Sie Überlegungen zum Grad von g an.
- Wie würden Sie vorgehen, um aus dem Graphen von g den Funktionsterm zu ermitteln?
- Welcher der folgenden Terme passt zur Funktion g?

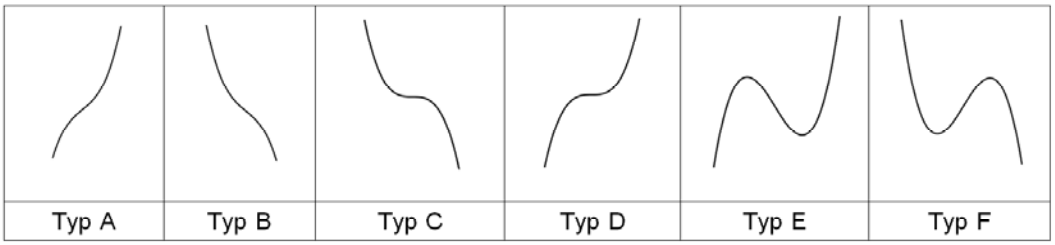
  (a) $\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 1{,}55$ (b) $-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1{,}55$

  (c) $-\frac{1}{16}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1{,}55$ (d) $\frac{1}{16}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x + 1{,}55$

6.3.2 Analysis: Graphentypen

Aufgabenstellung

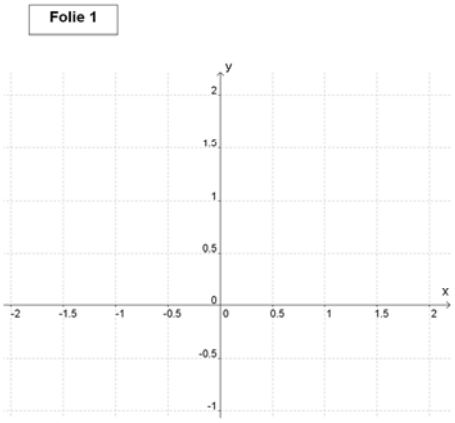
Die Abbildung zeigt die Graphentypen, wie sie bei einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 vorkommen können.

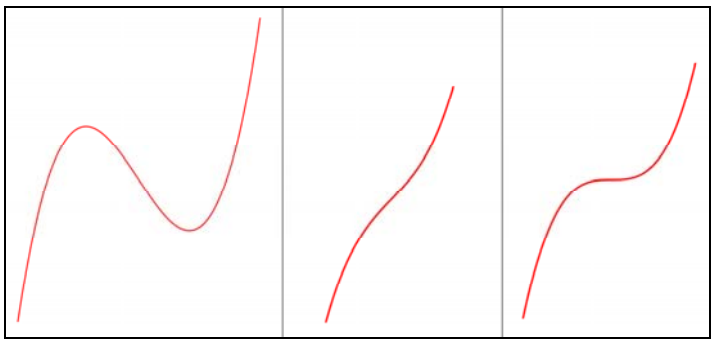


1. Begründen Sie, welcher Typ zu der Funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ gehört und platzieren Sie diesen Graphen so in dem Koordinatensystem auf der Folie 1, dass er zu g(x) passt.
2. Entscheiden Sie bei der Funktionenschar $g_k(x) = x^3 - kx$ in Abhängigkeit von k, welcher Graphentyp vorliegt.
3. Auf der Folie 2 sehen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'(x). Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von f(x) und begründen Sie den Verlauf.

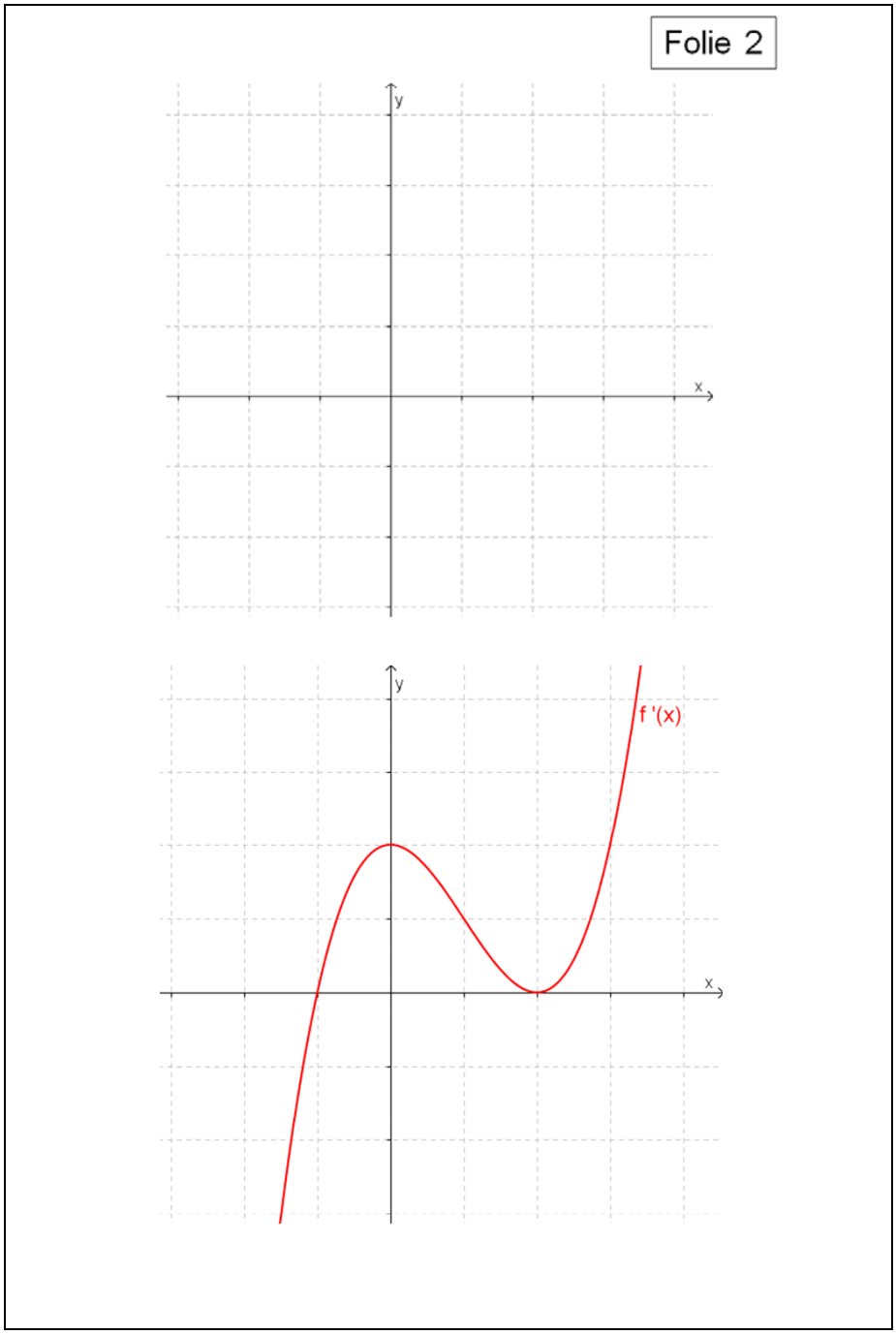
Material

3 Folienschnipsel mit Graphentypen und ein Koordinatensystem auf Folie 1.





Durch Umdrehen der Folien erhält man die Typen F, B und C.



Mögliche Zusatzfragen

- Wie kann man die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse berechnen?
- Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Stammfunktion von f.
- Wie findet man die Gleichung der Tangente im Wendepunkt?
- Mit der Berechnung $g(x + 0{,}5) - 0{,}5 = 2x^3 - 1{,}5x$ ist nachgewiesen, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Wendepunkt W(0,5|0,5) ist. Begründung?
- Der Graph jeder ganzrationalen Funktion vom Grad 3 hat einen Wendepunkt. Wie würden Sie bei einem Beweis vorgehen?

6.3.3 Analysis: Ein Optimierungsproblem

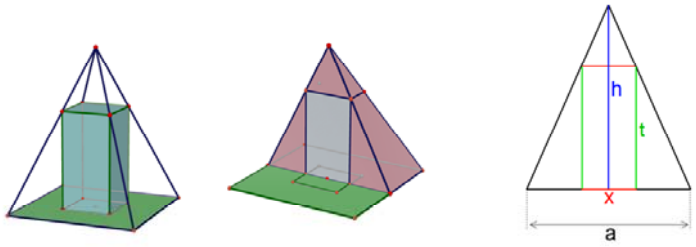
Aufgabenstellung

Halten Sie einen kurzen Vortrag zum Thema Optimierungsprobleme. Erläutern Sie Ihre Gedanken an folgendem Beispiel:

In eine quadratische Pyramide mit der Basislänge a und der Höhe h wird ein Quader einbeschrieben. Welche Seitenlänge muss das Basisquadrat des Quaders haben, damit dieser ein maximales Volumen hat?

Die Lösung finden Sie auf der beigefügten Folie. Erläutern und begründen Sie Schritte (1)-(5).

Material



(1) $\frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{h-t}{\frac{x}{2}} \rightarrow t = \frac{x}{a}h$

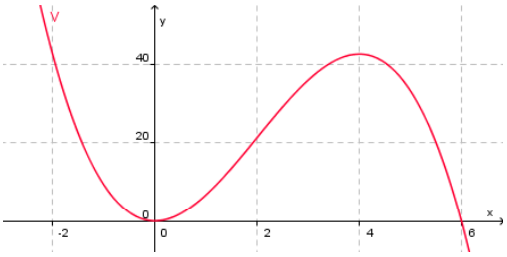
(2) $V(x) = x^2 \cdot t = x^2 \cdot (h - \frac{x}{a}h) = h \cdot (x^2 - \frac{1}{a}x^3)$

(3) $V'(x) = 2hx - 3\frac{h}{a}x^2$

(4) $2hx - 3\frac{h}{a}x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}a$ oder $x = 0$

(5) $V''(\frac{2}{3}a) = -2h$; $V''(0) = 2h$

Mögliche Zusatzfragen



- Die Grundseitenlänge des maximalen Quaders ist unabhängig von h. Das hätte man bei genauer Betrachtung der Funktionsvorschrift für V(x) bereits sehen können.
- Das Bild zeigt den Graphen für a=6 und h=8. Was können Sie zum Thema Wendepunkt sagen?
- Deuten Sie die Nullstellen von V(x) im Anwendungsbezug.
- Wie gehen Sie vor, um die Fläche zwischen dem Graphen von V(x) und einer Parallelen zur x-Achse durch den Wendepunkt zu bestimmen?
- Behauptung: Die Tangente an der Stelle x=3 geht durch den Ursprung. Wie gehen Sie vor, um das nachzuweisen?

Bemerkung

Im Zusammenhang mit der Funktionsuntersuchung in der Analysis bietet sich für die mündliche Prüfung die Interpretation und Erklärung von Zusammenhängen an Graphen an. Dabei können diese in drei Stufen mit zunehmendem Anforderungsgrad dargeboten werden:

(1) in einem skalierten Koordinatensystem,

(2) in einem Koordinatensystem ohne Achsenbeschriftung (Bsp. 6.3.1) oder

(3) ohne Koordinatensystem (Bsp. 6.3.2).

Bei der Zuordnung zwischen Graphen zu Funktionstermen ist die erste Variante ungeeignet, da hier durch Einsetzen schnell eine Beziehung identifiziert werden kann, was in der Regel aber nicht beabsichtigt ist.

Aufgabe 6.3.3 stellt eine interessante Aufgabenvariante dar, die auf den ersten Blick vielleicht verwundern mag, da ja schon alles „gerechnet“ ist. Im Vergleich zur Rechenaufgabe hat sie aber deutliche Vorteile:

- Wer den Ansatz nicht findet, hat bei der Rechenaufgabe keine Chance. So können aber vielleicht einige Schritte erklärt und sogar begründet werden;
- schwächere Schülerinnen und Schüler können in der Regel das Kalkül erläutern, leistungsstärkere können auch Begründungen liefern und verallgemeinern. Insofern ist dieser Aufgabentyp selbstdifferenzierend und
- er bietet eine bessere Vorlage für einen Vortrag als eine Rechenaufgabe.

6.3.4 Analytische Geometrie: Objekte im Raum – Abstände

Aufgabenstellung

Sie haben sich in der Analytischen Geometrie mit Punkten, Geraden und Ebenen im Raum beschäftigt. Beschreiben Sie die möglichen Lagebeziehungen dieser Objekte zueinander und erläutern Sie kurz die Ideen zur Abstandsberechnung zwischen je zweier solcher Objekte.

Material

Holzstäbe und Pappdeckel zur Demonstration

Mögliche Zusatzfragen

- Geben Sie eine geometrische Interpretation der Berechnung des Abstandes Punkt-Ebene mit Hilfe der Hesseschen Normalenform.
- Gibt es eine Hessesche Normalenform im $\mathbb{R}^2$?
- Entwickeln Sie die Darstellung einer Kugel um M(2|3|4), die die yz-Ebene berührt.
- Entwickeln Sie die Darstellung eines Zylinders um die z-Achse mit dem Radius 2.
- Beschreiben Sie die Lage der Punkte P(x|y|z) mit $x^2+y^2=4$.

6.3.5 Analytische Geometrie: Achsenspiegelung in der Ebene

Aufgabenstellung

Der Punkt P(6|7) soll an der Geraden g(x) = 2x gespiegelt und die Koordinaten des Bildpunktes berechnet werden. Die dazu nötigen Rechenschritte zeigt das Derive-Protokoll auf der beiliegenden Folie.

a) Zeichnen Sie die in Schritt #6 definierte Gerade h ein. Erläutern und begründen Sie die einzelnen Schritte in Form eines kurzen Vortrags zum Thema „Berechnung von Achsenspiegelungen“.

b) Führt man die Rechnung allgemein für einen Punkt (x|y) durch, so erhält man den Bildpunkt $P'\left(\frac{4y-3x}{5} \middle| \frac{4x+3y}{5}\right)$. Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe einer passenden Matrix.

Material (Folie)

#1: $g(x) := 2 \cdot x$

#2: $P := \begin{bmatrix} Px \\ Py \end{bmatrix}$

#3: $h(x) := -\frac{1}{2} \cdot x + b$

#4: SOLVE(h(Px) = Py, b)

#5: $b = \frac{Px}{2} + Py$

#6: $h(x) := -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{Px}{2} + Py$

#7: SOLVE(g(x) = h(x), x)

#8: $x = \frac{Px + 2 \cdot Py}{5}$

#9: $Sx := \frac{Px + 2 \cdot Py}{5}$

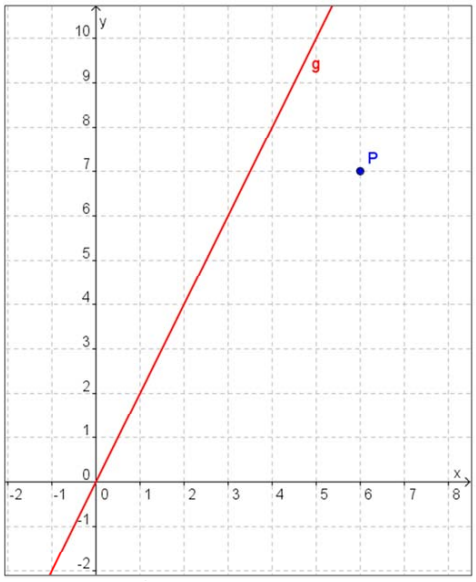
#10: $Sy := g(Sx)$

#11: $Sy := \frac{2 \cdot (Px + 2 \cdot Py)}{5}$

#12: $S := \begin{bmatrix} Sx \\ Sy \end{bmatrix}$

#13: $Q := S + (S - P)$

#14: $Q := \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot Py - 3 \cdot Px}{5} \\ \frac{4 \cdot Px + 3 \cdot Py}{5} \end{bmatrix}$



Mögliche Zusatzfragen

- Was wird hier berechnet?

#14: $\text{SOLVE}\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)$

#15: $2\cdot x - y = 0$

- Wenn A eine Abbildungsmatrix ist mit $A^2=1$, ist dann A eine Achsenspiegelung?
- Die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ soll mit einem Vektor multipliziert werden. Geben Sie einen solchen Vektor an. Kann man das als Abbildung interpretieren?
- Nennen Sie weitere Anwendungen von Matrizen.

6.3.6 Lineare Algebra: Mehrstufige Prozesse

Aufgabenstellung

In einem Land werden die Bürger nach ihrem Einkommen in drei Gruppen eingeteilt:

Niedrig – **M**ittel - **H**och

Langfristige Beobachtungen haben gezeigt, dass im Jahresmittel 60 % der Niedrigverdienenden in dieser Gruppe bleiben, während 40 % den Sprung in die mittlere Gruppe schaffen. Dort bleiben 80 % und nur 10 % wechseln jeweils in die benachbarten Einkommensgruppen. Bei den hohen Einkommen wechseln 20 % zu den mittleren Einkommen und 10 % stürzen sogar in die untere Gruppe ab, während der Rest bei seinem hohen Einkommen bleibt.

a) Stellen Sie einen Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix auf.

b) Wir nehmen an, dass es 1 Million Bürgerinnen bzw. Bürger mit Einkommen gibt und dass diese Zahl über den betrachteten Zeitraum konstant bleibt. Zeigen Sie, dass die folgende Situation stabil ist: 200.000 Niedrigverdienende, 600.000 Mittelverdienende, 200.000 Hochverdienende. Erläutern Sie ohne Rechnung den Weg, wie man zu diesen Zahlen kommen kann.

Mögliche Zusatzfragen

- Wenn man im Übergangsgraphen den Pfeil von M nach N weglässt (90 % bleiben bei M), was lässt sich dann in einem stabilen Zustand über N und H sagen?
- Wie lässt sich die Matrix interpretieren, wenn die Spaltensumme <1 bzw. >1 ist?
- Die Zustände N, M und H legen drei Zahlen fest. Dieses Zahlentripel definiert einen Punkt im Raum. Die Übergangsmatrix kann man dann als Abbildungsmatrix interpretieren. Welche Bedeutung hat dann der Punkt P(200 000|600 000|200 000)?
- Wenn eine Abbildung A zwei Fixpunkte P und Q besitzt, dann ist auch der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ein Fixpunkt. Wie gehen Sie vor, um das nachzuweisen?

6.3.7 Stochastik: Zwei Artikel – eine Quelle?

Aufgabenstellung

Die beiden Zeitungsartikel beziehen sich auf das gleiche Ereignis. Aber können die Daten aus derselben Quelle stammen? Führen Sie eine entsprechende Untersuchung durch und erläutern Sie Ihr Vorgehen in einem kurzen Vortrag.

Es geht aufwärts!	**Können wir damit zufrieden sein?**
Köln - An der letzen Erstsemester-BWL-Klausur nahmen 1500 Studenten teil. Für 30% von ihnen war dies schon der zweite und damit letzte Versuch. Unter denen, die die Prüfung zum ersten Mal ablegten, war die Erfolgsquote mit 80% erfreulich hoch und erheblich besser als in den vergangenen Jahren. Insgesamt lag die Durchfallquote bei 29%.	Köln - Bei der letzen Erstsemester-BWL-Klausur konnten lediglich 840 Studenten im ersten Anlauf die Klausur bestehen, was einen Anteil von nur 56% unter allen Teilnehmern ausmacht. Hingegen fielen 225 Studenten auch beim zweiten Versuch durch, so dass in der Gruppe der Wiederholer die Erfolgsquote magere 50% betrug.

Mögliche Zusatzfragen

Die Untersuchung führt auf Vierfeldertafeln und eventuell Baumdiagramme.

- Interpretieren Sie die Einträge der Vierfeldertafel als Wahrscheinlichkeiten mit den Ereignissen E: Erstversuch, B: bestanden.
- Erläutern Sie in diesem Zusammenhang den Satz von Bayes.
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen.

6.3.8 Stochastik: Analyse von Lottospielen

Aufgabenstellung

Bereiten Sie zu diesem Thema einen kurzen Vortrag vor. Erläutern Sie Ihre Gedanken zunächst an folgendem Beispiel und nehmen Sie Stellung zu möglichen Varianten.

Klaus und Gabi wollen für eine Abi-Fete ein Lotto-Spiel entwickeln. Im Gegensatz zum „echten“ Lotto sollen aber nur 9 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 9 verwendet werden. Entsprechend sieht dann auch der „Lottoschein“ aus, auf dem genauso viele Kreuze gemacht werden dürfen, wie Kugeln gezogen werden. Klaus und Gabi überlegen gerade, wie viele das sein sollen.

a) Klaus ist der Meinung, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit abnimmt, je mehr Kugeln gezogen werden. Nehmen Sie dazu Stellung.

b) Sie einigen sich schließlich darauf, dass 3 Kugeln gezogen werden und dass es nur bei 3 Richtigen einen Gewinn gibt. Der Einsatz soll 1 Euro betragen. Machen Sie einen begründeten Vorschlag, wie hoch der ausgezahlte Gewinn sein sollte, damit das Spiel einerseits attraktiv ist, andererseits aber auch genug für die Abi-Kasse eingenommen wird.

c) Gabi meint, dass man auch bei 2 Richtigen einen Gewinn auszahlen sollte, um die Attraktivität zu erhöhen. Welche Gewinnauszahlung würden Sie in diesem Falle vorschlagen?

Mögliche Zusatzfragen

- Interpretieren Sie den Binomialkoeffizienten.

Weitere Zusatzfragen können sich auf mögliche Varianten beziehen:

- Spiel mit Zusatzzahl,
- mehr Kreuze als gezogene Kugeln,
- mehr gezogene Kugeln als Kreuze.

6.3.9 Stochastik: Übertragung von Morsezeichen

Aufgabenstellung

Beim Morseverkehr wird jedes Zeichen (z. B. ein Buchstabe) als Folge von kurzen und langen Signaltönen übertragen. Für das Folgende wird angenommen, dass ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 falsch übertragen wird.

Erläutern Sie in an diesem Beispiel die Begriffe Bernoulli-Experiment, Zufallsvariable, Binomialverteilung, Binomialkoeffizient, Erwartungswert und Varianz.
Interpretieren Sie im Zusammenhang mit der Übertragung der Nachricht

rosamundeschenkmirdeinherzundsagja

die Gleichung $P(E) = 561 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{32}$.

Mögliche Zusatzfragen

- Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Übertragungsfehler bei der o. g. Nachricht. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.
- Erläutern Sie an diesem Beispiel das Vorgehen bei einem Hypothesentest sowie die Bedeutung von Fehler 1. Art und Fehler 2. Art.
- Die Folie zeigt die Tabelle der Morsezeichen.

Material (Folie)

<table>
<tr><td rowspan="8">T –</td><td rowspan="4">M – –</td><td rowspan="2">O – – –</td><td>CH – – – –</td></tr>
<tr><td>Ö – – – ·</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G – – ·</td><td>Q – – · –</td></tr>
<tr><td>Z – – · ·</td></tr>
<tr><td rowspan="4">N – ·</td><td rowspan="2">K – · –</td><td>Y – · – –</td></tr>
<tr><td>C – · – ·</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D – · ·</td><td>X – · · –</td></tr>
<tr><td>B – · · ·</td></tr>
<tr><td rowspan="8">E ·</td><td rowspan="4">A · –</td><td rowspan="2">W · – –</td><td>J · – – –</td></tr>
<tr><td>P · – – ·</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R · – ·</td><td>Ä · – · –</td></tr>
<tr><td>L · – · ·</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I · ·</td><td rowspan="2">U · · –</td><td>Ü · · – –</td></tr>
<tr><td>F · · – ·</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S · · ·</td><td>V · · · –</td></tr>
<tr><td>H · · · ·</td></tr>
</table>

Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang die o. g. Fehlerwahrscheinlichkeit.

7 Literatur

BLUM, Werner et al.: Bildungsstandards Mathematik: konkret, Cornelsen Scriptor, Berlin 2006

BÜCHTER, A./LEUDERS, T.: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Lernen fördern – Leistung überprüfen, Cornelsen Scriptor, Berlin 2005

DANCKWERTS/VOGEL: Analysis verständlich unterrichten, Elsevier 2006

GREEFRATH, Gilbert: Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben, Aulis, Köln 2007

HAAS/MORATH: Anwendungsorientierte Aufgaben, Schroedel, Braunschweig 2005

HERGET, JAHNKE, KROLL: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht, Cornelsen, Berlin 2001

HUßMANN, Stephan: Mathematik entdecken und erforschen, Cornelsen, Berlin 2003

Impulse für den Mathematikunterrricht in der Oberstufe, Konzepte und Materialien aus dem Modellversuch, KLETT 2007

Internethinweise

http://www.learnline.de/angebote/selma/foyer/projekte/dinslakenproj3/es_geht_los.htm

Stationen mit Anwendungen und Erklärungen zum Rechnen mit Matrizen.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung Hamburg:

- Analysis
  http://www.mint-hamburg.de/abitur/Analysis.pdf
- Lineare Algebra/Analytische Geometrie
  http://www.mint-hamburg.de/abitur/LA.pdf
- Stochastik
  http://www.mint-hamburg.de/abitur/Stochastik.pdf

Aufgaben mit CAS und GTR

GREEFRATH/MÜHLENFELD: Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II, Bildungsverlag 1, 2007

KNECHTEL, H./WEISKIRCH, W.: Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern 1-3, Schroedel, Hannover 2001/2005

KNECHTEL, H., et al.: Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra 1 u. 2, Westermann 2003

BAUMANN, Rüdeger: Analysis 1 u. 2, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett, Stuttgart 2002

Alle Links in dieser Handreichung wurden am 28.08.2009 zuletzt überprüft.

Im Bereich der Mathematik sind bisher folgende Titel erschienen bzw. noch lieferbar:

Reihe „PZ-Information“

23/2000	Standortplanung. Ein Thema der Wirtschaftsmathematik im Unterricht
29/2000	Fachübergreifende Themen im Mathematikunterricht
14/2001	Lernen an Stationen – Entdeckendes Lernen Drei Beispiele für innere Differenzierung im Mathematikunterricht
10/2002	Gotische Maßwerkfenster. Heft und CD.
14/2002	Mathematikaufgaben für Mitdenker, Sek. I

Siehe auch unter http://pz.bildung-rp.de den Link: Materialien, PZ-Informationen

Belegexemplare stehen darüber hinaus bis auf Weiteres beim Pädagogischen Zentrum in Bad Kreuznach und in allen Außenstellen des Pädagogischen Zentrums zur Einsichtnahme zur Verfügung:

Außenstelle	**Anschrift**	**E-Mail**	**Telefon**	**Telefax**
Altenkirchen	Kooperative Gesamtschule Hochstraße 13a 57610 Altenkirchen Postfach 1176 57601 Altenkirchen	Altenkirchen@pz.bildung-rp.de	02681/981369	02681/983674
Daun	Thomas-Morus-Gymnasium Freiherr-vom-Stein-Str. 16 54550 Daun	Daun@pz.bildung-rp.de	06592/10446	06592/980215
Koblenz	Schulzentrum Karthause Gothaer Straße 23 56075 Koblenz	Koblenz@pz.bildung-rp.de	0261/53467 0261/95229061	0261/95229062
Landau	Hauptschule West Forststr. 2 76829 Landau	Landau@pz.bildung-rp.de	06341/88903	06341/84686
Ludwigshafen	Sternstraße 195 67063 Ludwigshafen	Ludwigshafen@pz.bildung-rp.de	0621/678519	0621/679050
Speyer	Bereich Berufsbildende Schulen Butenschönstraße 2 67346 Speyer	Speyer@pz.bildung-rp.de	06232/67033-0	06232/67033-30
Trier-Saarburg	Blümchesfeld 13-15 54439 Saarburg	Trier@pz.bildung-rp.de	06581/923328	06581/923329

Im Anschluss an den veränderten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I wird für den Unterricht in der Sekundarstufe II und für das Abitur in den EPA gefordert, dass neben der Beherrschung von Begriffen und Verfahren auch das Verständnis dafür, wie man zu zentralen Aussagen gelangt, an Bedeutung gewinnt. In gleicher Weise kommt es auch auf das Beschreiben und Begründen von Problemlösungen an. Um diese Kompetenzen im erforderlichen Umfang und nachhaltig sicherzustellen, müssen die Aufgabenstellungen in den Kursarbeiten und Prüfungen auch vernetzte Problemfelder ansprechen und Möglichkeiten bieten, Zusammenhänge zu entdecken und vielfältige Lösungswege zu gehen, kurz, sie müssen offener werden.

Wie Aufgaben offener werden können und wie man solche durch Variation herkömmlicher Aufgaben gewinnen kann, ist ein Ziel dieser PZ-Information, die sich gleichermaßen an junge Kolleginnen und Kollegen wendet, die zum ersten Mal Abituraufgaben erstellen, wie auch an erfahrene Lehrkräfte, die ihre Aufgaben nach den oben zitierten Zielen weiterentwickeln.

Die Handreichung enthält Beispielaufgaben, die analysiert werden und Abiturvorschläge für die schriftliche und mündliche Prüfung, die zum Üben bei der Abiturvorbereitung eines Kurses eingesetzt werden können. Da Schülerinnen und Schüler rechtzeitig auf die verlangten Kompetenzen vorbereitet werden müssen, empfiehlt es sich, die Anregungen in dieser Handreichung schon während des Oberstufenunterrichts zu berücksichtigen.

Pädagogisches Zentrum
Rheinland-Pfalz
Bad Kreuznach

ISSN 0938-748X