

## Wie viele ANNA-Zahlen gibt es?

- Bericht über ein Unterrichtsexperiment zum Selbstentdeckenden Lernen mit vielen Erkenntnissen zur Dynamik in einer heterogenen Gruppe -

„Ein Kind ist kein Gefäß zum Füllen,  
sondern eine Lampe zum Entzünden!“



Das ist das Motto  
der **Lamplighter School**  
in Dallas / Texas

**Definition: ANNA-Zahlen** sind vierstellige Zahlen, bei denen Anfangs- und Endziffer bzw. die beiden mittleren Ziffern übereinstimmen. Es darf aber nicht viermal die gleiche Ziffer sein, das heißt das äußere und das innere Ziffern paar müssen sich unterscheiden.

Das hier vorgestellte Unterrichtsexperiment wurde in einer KiTa-Gruppe mit 5 Mädchen und 6 Jungen zwischen 6 und 11 Jahren aus den umliegenden Grundschulen im Anschluss an die nachmittägliche Hausaufgabenbetreuung durchgeführt. Der Unterricht wurde von einem Erzieher der KiTa nach Idee und Planung des Autors gehalten.

Zu diesem Experiment gibt es auch eine DVD, in der wichtige Szenen aus der Gruppenarbeitsphase abgerufen werden können. Diese kann – jedoch nur für die Lehreraus- bzw. Fortbildung – angefordert werden. Richten Sie Ihre diesbezügliche Anfrage an das „Pädagogische Landesinstitut, Abt. 2.08 Medienbildung, Hofstr. 257c, 56077 Koblenz“.

### 1 Die Idee für das Experiment

Die Sache begann mit den Büchern der beiden Schweizer Pädagogik-Professoren Peter Gallin und Urs Ruf<sup>iii</sup>, die ich als eine Grundlagenlektüre für alle ansehen würde, die sich mit Selbstentdeckendem Lernen beschäftigen wollen. Sie brachten mich auf die Idee, eine Aufgabe zu erstellen, in der diese Art des Lernens, nämlich das „Lernen auf eigenen Wegen“, einmal ausprobiert wird. Davon versprach ich mir, dass viele verschiedene Schülerinnen und Schüler ihre Ideen und Fertigkeiten in einen Gruppenunterricht einbringen könnten. Das ist gerade in Zeiten der Heterogenitäts-Debatte ein Ansatz, um andere Kulturen, andere Familienhintergründe und andere Lebenserfahrungen in den Unterricht zu holen. Des Weiteren sollte sich eine Entlastung der Lehrkraft von der Rolle des „Alleinunterhalters“ ergeben und diese stattdessen die Möglichkeit erhalten, durch die Reihen zu gehen und zum Lernberater zu werden. So können Lehrerinnen und Lehrer auch die Lernfortschritte besser erfassen, die jedes einzelne Kind macht.

Was mich als Mathematiker auf die Betrachtung der ANNA-Zahlen gebracht hat, kann ich Ihnen an einem Beispiel erklären: Die Frage „Wie viele Zahlen gibt es, die...“ wird oft in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestellt und ist meistens nicht leicht zu beantworten. „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in drei Versuchen eine „Sechs“ zu würfeln?“ heißt es z.B. beim „Mensch-ärgere-Dich-nicht“. Dann empfehle ich meinen Schülerinnen und Schülern, sich zuerst mal nur ein mögliches Ergebnis aufzuschreiben und dann alle Variationen davon durchzuspielen: Beim dreimaligen Würfeln könnte ein Ergebnis so aussehen (2, 1, 6) und es gibt  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  Variationen dazu. Will ich aber die Mächtigkeit des Gegenereignisses wissen, in drei Versuchen keine „Sechs“ zu würfeln, so sind nur noch die Zahlen von 1 bis 5 zugelassen, also gibt es nur noch  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  mögliche Ergebnisse. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit bei  $1 - 125/216 = 0,42 = 42\%$ .

So entdecken die Kinder viele Dinge lange vor der Zeit, zu der sie im Lehrplan vorgesehen sind, aber das kann man ihnen nicht verbieten – und schon gar nicht beim Selbstentdeckenden Lernen.

Darüber hinaus bin ich auf diese Zahlen gekommen, weil ich sie in verschiedenen Examensarbeiten bei Referendaren für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen vorgefunden habe. Doch waren deren Aufgaben meist komplizierter als meine.

Die Betrachtung über die ANNA-Zahlen ist auch ein Beispiel für

#### „Forschendes Lernen“<sup>iii</sup>:

1. Den Schülerinnen wird ein mathematisches Phänomen vorgestellt, das aber in der Regel schon vorher erfunden bzw. entdeckt wurde.
2. In flexiblem Wechsel aus Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit erforschen die Lernenden selbstständig und kooperativ mit Hilfe von Arbeitsaufträgen das Themenfeld. (Ich-Du-Wir-Methode<sup>iv</sup>)
3. Die Ideen und Ergebnisse werden in der Klassengemeinschaft präsentiert und diskutiert.
4. Unter Leitung der Lehrkraft werden die Resultate der Schülerinnen und Schüler zu einem gemeinsamen und verbindlichen Ergebnis zusammengefasst. Die Lehrkraft führt ggf. Fachwörter ein und stellt allgemeine Muster und Strukturen der erforschten mathematischen Inhalte heraus.

Im Vorfeld des Unterrichtsexperiments hatten die Schülerinnen und Schüler die ANNA-Zahlen kennen gelernt und damit die Ich- bzw. Du-Phase bereits durchlaufen. Im Rahmen dieser Vorbereitung bekam jede Schülerin und jeder Schüler eine Karteikarte und musste ihre bzw. seine erste ANNA-Zahl aufschreiben. Anschließend kontrollierten zwei Banknachbarn ihre Vorschläge gegenseitig und überlegten gemeinsam, was das überhaupt sei, eine ANNA-Zahl. So musste in der neuerlichen Sitzung, in der nur noch die Gruppenphase stattfinden sollte, eine Wiederholung vorgeschaltet werden - insbesondere für die Kinder, die neu hinzugekommen waren. Der Erzieher und die schon kundigen Schülerinnen und Schüler schrieben dazu einige Beispiele von tatsächlichen oder vermeintlichen ANNA-Zahlen auf ein Flipchart und die anderen mussten beurteilen, ob es sich um eine solche Zahl handelt. Dabei wurden auch falsche „ANNA-Zahlen“ diskutiert, wie zum Beispiel 4444 oder 0440, die ja nicht der Definition entsprechen (s.o.). So konnten die einen Kinder den anderen das erklären.

## 2 Die Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung enthielt folgende Elemente:

### **Auftrag: „Findet alle ANNA-Zahlen!“**

Auf eurem Tisch habt ihr Päckchen mit 100 Karteikarten in einer bestimmten Farbe. Ihr dürft auf jede Karte nur genau eine Zahl schreiben; am besten so groß, dass die Karte ganz ausgefüllt wird. Da die Karten teuer waren, solltet ihr darauf achten, dass ihr keine Karten verschreibt. Das könnte nämlich passieren, wenn ihr eine Zahl zum zweiten oder dritten Mal aufschreibt, obwohl sie zuvor schon von dem einen oder anderen Kind aufgeschrieben wurde.“

**Wettbewerb:** Das Ganze ist ein Wettbewerb zwischen verschiedenen Tischgruppen. Die Schülerinnen und Schüler, die um einen Tisch herum sitzen, arbeiten in einem Team. Ziel für jede Tischgruppe ist es, möglichst alle ANNA-Zahlen zu finden, die es gibt. Wenn eine Gruppe glaubt, all diese Zahlen gefunden zu haben, ruft sie „Stopp!“ und alle müssen ihre Stifte hinlegen. Spätestens nach 30 Minuten ist das Spiel beendet, auch wenn keine Gruppe fertig geworden ist.

**Präsentation:** Danach hat jede Gruppe noch einmal 5 Minuten Zeit, die Präsentation ihrer Ergebnisse vorzubereiten. Bei der Präsentation scharen sich alle Schülerinnen und Schüler um den Tisch einer Gruppe und diese zählt ihre Karten vor. Außerdem erklärt die Gruppe, wie sie es geschafft hat, keine oder möglichst wenig doppelte Karten zu erzeugen.

Weil die Schülerinnen und Schüler noch am Anfang ihrer Schulkarriere stehen (2. Schuljahr bis 5. Schuljahr), darf man sie nicht überfordern. Aus diesem Grund wurde auf jegliche Rechnung mit den ANNA-Zahlen verzichtet. Die Schülerinnen und Schüler müssen eigentlich nur die Ziffern von 0 bis 9 kennen, die unserem Zahlensystem zugrunde liegen. Außerdem müssen sie grundsätzlich vierstellige Zahlen kennen und vorlesen können. Zum Auswerten des Wettbewerbs haben die Karteikarten der verschiedenen Tischgruppen jeweils eine andere Farbe.

### Hier eine Aufstellung aller ANNA-Zahlen

1991 1881 1771 1661 1551 1441 1331 1221 1001  
2992 2882 2772 2662 2552 2442 2332 2112 2002  
3993 3883 3773 3663 3553 3443 3223 3113 3003  
4994 4884 4774 4664 4554 4334 4224 4114 4004  
5995 5885 5775 5665 5445 5335 5225 5115 5005  
6996 6886 6776 6556 6446 6336 6226 6116 6006  
7997 7887 7667 7557 7447 7337 7227 7117 7007  
8998 8778 8668 8558 8448 8338 8228 8118 8008  
9889 9779 9669 9559 9449 9339 9229 9119 9009

Abb. 3

Dabei fällt auf, dass **die Zahl 0** nicht als äußere Ziffer vorkommt. Eine solche Zahl würde auch nicht der obigen Definition einer ANNA-Zahl entsprechen, da sie nur dreistellig wäre. Denn bei uns werden führende Nullen bei der schriftlichen Darstellung von Zahlen üblicherweise weggelassen. Die Verwendung der Zahl 0 als Innenziffer ist dagegen erlaubt, wie man auch an der letzten Spalte in der obigen Aufstellung sieht.

### **3 Der Wettbewerb wird gestartet**

Ab jetzt sind die Kinder auf sich gestellt. Um die Aufgabe zu bewältigen, benötigen sie **Strategien der Zusammenarbeit**, der **Kommunikation** und des **Anordnens** zur Erstellung dieser Zahlen.



### **Hier der Verlauf des Experiments:**

Es begann mit einer „Wuselphase“<sup>v</sup>, in der alle anfangen, Karten zu beschriften. Dabei schrieb der älteste Schüler gleich drauflos, ohne auf seine Tischgenossen zu achten. Doch schon bald füllten sich die Tische mit wahllos hingeworfenen Karten. Einige Kinder, die versuchten festzustellen, ob es ihre neue ANNA-Zahl schon gibt, hatten es immer schwerer, auf dem Tisch noch durchzublicken.

Es war also Ordnen angesagt. Darauf kamen auch einige Kinder in der Gruppe von selbst und sortierten die Karteikarten indem sie sie z.B. spaltenweise entsprechend der Anfangsziffer auf den Tisch legten.

Doch schon wieder füllten sich die Tische bedrohlich, weil es immerhin neun verschiedene Anfangsziffern gab. Dieses Problem lösten eigentlich alle drei Tische durch kontrollierte Stapelbildung. Es begann damit die älteste Gruppe, in der sich ein besonders begabter Schüler befand. Dieser nahm so nach und nach die Geschicke seiner Gruppe in die Hand, er schlüpfte also in die Leitungsfunktion. Er begann damit, Aufgaben zu vergeben: „Was haben wir denn noch nicht; du könntest noch alle Karten schreiben, die mit 6 anfangen.“

In der ersten Gruppe gab es schon bald Auflösungserscheinungen, weil die Jüngsten sich nicht solange konzentrieren konnten. Denn bei unserer Gruppe ergab sich die Heterogenität vor allem aus der unterschiedlichen Altersstruktur der Kinder. Sie fingen an umherzulaufen, Faxen zu machen oder auf die Toilette zu gehen. Aber die beiden älteren Kinder glichen das wieder aus, indem sie zunächst die Jüngeren zum ordentlichen Ausfüllen der Karten anleiteten und später ganz deren Part übernahmen. Auch der Erzieher, der das Problem erkannt hatte, half jetzt intensiv den jüngsten Gruppenmitgliedern. Daran sieht man, dass die Lehrkraft sich auch fragen muss, ob ihre Aufgabe altersgemäß ist. Was aber hier eingesetzt hat, ist die so genannte „Binnendifferenzierung“. Zwar können alle relativ leicht in die Aufgabe einsteigen; später entwickeln sich aber dann die Lösungsfortschritte auseinander<sup>vi</sup>.

### **Zu den Ergebnissen:**

Alle Gruppen hatten über 60 ANNA-Zahlen gefunden und das war zu dieser späten Nachmittagsstunde bei 81 möglichen Zahlen eine starke Leistung.

Das Stoppzeichen kam von der 3. Gruppe (die 3 Ältesten) nach 17 Minuten der eigentlichen Bearbeitungszeit. Dennoch hatten sie nicht gewonnen. Das lag zum einen an dem undisziplinierten Verhalten des einen Schülers zu Beginn, was Abzüge wegen verschriebener Karten zur Folge hatte. Aber leider hatten sie noch einen weiteren Fehler gemacht: Das Päckchen mit der 8 am Anfang wurde komplett vergessen.

Gewonnen hatte die mittlere Gruppe mit den vier Mädchen und hauptsächlich wegen einer Schülerin, die mit buchhalterischer Genauigkeit darüber wachte, dass keine Karten verschrieben wurden (es musste nur zweimal ein Punkt abgezogen werden). D.h. dass sie bei 64 Rohpunkten 66 ANNA-Zahlen gefunden hatten; es fehlten also nur noch 15.

Aber auch der Gruppe 1 wurde ein Lob ausgesprochen, denn die beiden verbliebenen Mitarbeiter hatten trotz der Schwächung (s.o.) noch 60 ANNA-Zahlen gefunden; sie konnten aber wegen verschriebener Karten nicht gewinnen und belegten Platz 2.

Bei der dritten Gruppe waren die Schüler einigermaßen zerknirscht, dass sie auf dem letzten Platz gelandet waren. Das löste eine ziemlich intensive und heilsame Fehlerdebatte aus. Was dabei herauskam, war kurz gesagt: Es braucht „mehr Team-Zusammenarbeit“ und „mehr Ordnung“. Aber es ist, wie der Erzieher zum Schluss feststellte, gar nicht nötig, die Plätze 1 bis 3 zu vergeben. Denn alle drei Gruppen hatten sehr viele ANNA-Zahlen gefunden und unterschieden sich kaum in ihren Ergebnissen. Der Wettbewerb war also eigentlich unnötig und somit nur eine zusätzliche Motivation.

#### **4 Warum kommt hier der Aufgabenstellung so große Bedeutung zu?**

Wenn eine Lehrkraft einen Unterricht zum Selbstentdeckenden Lernen plant, muss sie dafür Sorge tragen, dass jeder Schülerin und jedem Schüler möglichst viel Raum und Zeit für individuelle Lösungen bleibt. Das krasse Gegenteil wäre, dass die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern ihren eigenen Lösungsweg überstülpt. Und die Lehrkraft muss alles so akzeptieren, wie es kommt, auch Umwege und Irrwege. Dennoch gibt es Punkte, an denen die Lehrkraft eingreifen muss, weil der Lösungsprozess ins Stocken geraten ist und keine weiteren Lösungsversuche unternommen werden. Dies kann zum Beispiel der Fall sein, wenn eine Schülerin oder ein Schüler sich in eine Situation manövriert hat, die eine Überforderung darstellt. In einer solchen Situation ist es gut, wenn die Lehrkraft sich mit der entsprechenden Gruppe zusammensetzt und verschiedene Auswege aufzeigt. Die Auswahl, welchen Weg sie einschlagen wollen, bleibt aber bei den Schülerinnen und Schülern. Wenn der Prozess wieder angestoßen ist, zieht sich die Lehrkraft wieder zurück. Das heißt aber auch, die Lehrkraft muss diesen Rückzug vorbereiten, indem sie alle Forderungen an die Schülerinnen und Schüler in die Aufgabe packt und auf keinen Fall die eigene Formulierung der Aufgabe nachbessert („So ist das nicht gemeint, sondern ...“). So kann es sein, dass die Lernenden manche Herausforderungen erst während der Lösungsphase entdecken. Das betrifft in unserem Fall das Ordnen und das päckchenweise Wegräumen der Karten. Des Weiteren muss die Lehrkraft auch die kritischen Punkte kennen, wo die Kinder einfach nicht mehr weiterkommen, weil sie sich beispielsweise in eine Überforderung hinein manövriert haben. So was kam während meines Experiments auch vor - der Erzieher setzte sich dann zu der betroffenen Gruppe, machte einige Lösungsvorschläge und zog sich aber dann wieder zurück. Das heißt die Lehrkraft bezahlt für ihre Freiheit in der Bearbeitungsphase indem sie mehr Zeit als sonst in die Aufgabenstellung investiert. Man könnte jetzt noch einwenden, dass eine solche Vorgehensweise im alltäglichen Unterricht zu viel Zeit in Anspruch nehmen würde. Aber man muss den Kindern auch Zeit lassen für ihre eigenen Lösungsversuche.

#### **5 Ausblick: Übertragung des Experiments auf Interaktive Wandtafeln (IWB)**

Wir hatten dann einige Zeit später noch den Versuch unternommen, das Experiment an einem interaktiven Whiteboard durchzuführen:

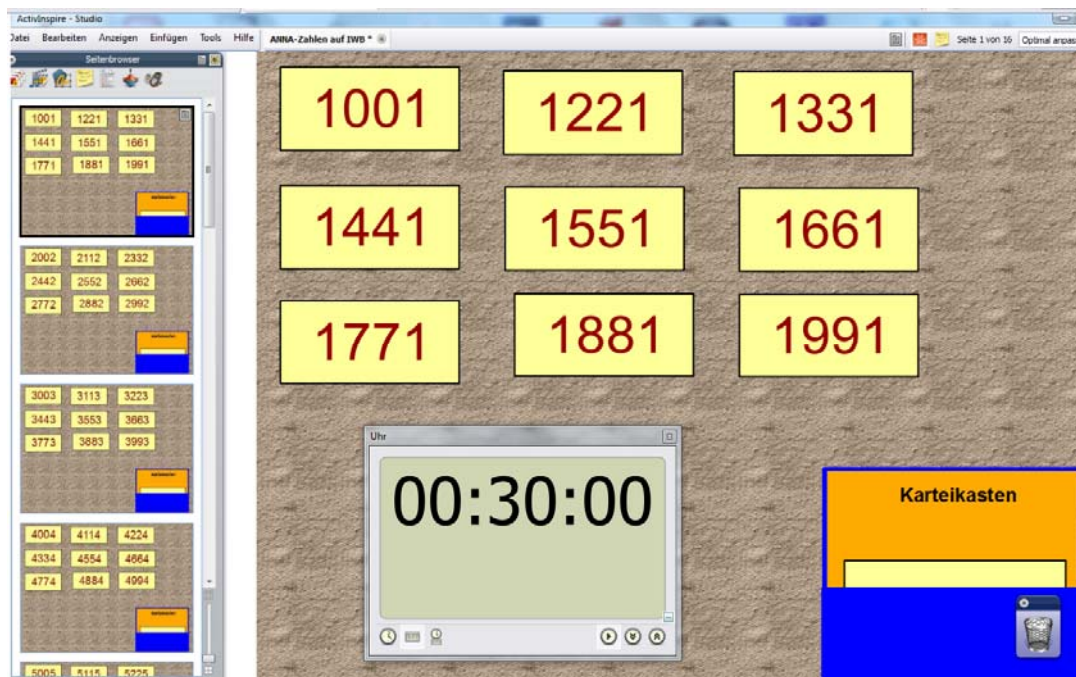


Abb. 5

Dabei kann man z.B. immer neue Tafeln aufmachen (siehe Seitenbrowser am linken Bildrand), um dort nur die ANNA-Zahlen mit einer bestimmten Anfangsziffer zu sammeln. Dies geschieht mit Drag&Drop bzw. mit Copy&Paste; also Verfahren, die einem auf der herkömmlichen Kreidetafel noch nicht zur Verfügung standen. Außerdem kann man auf allen Tafeln eine in die Tafel integrierte Uhr mitlaufen lassen, die die noch verbleibende Zeit anzeigt (hier neben dem Karteikasten auf der Haupttafel vor dem Countdown). Für das Interaktive Whiteboard hatte ich mir selbst einen virtuellen Karteikasten (s. Abb. 6) programmiert, der einem perfekt die Illusion vermittelt, auf einem wirklichen Flipchart aus Papier zu arbeiten. Ein solcher Karteikasten ist in vielen Unterrichtssituationen von Nutzen; so auch wenn man Begriffe nach Pro und Contra sortieren will. Dafür gibt es bei einem SMART-Board die Möglichkeit auf eine zweigeteilte Tafel umzuschalten. Bei einem Promethean-Board würde man einfach einen senkrechten Strich in der Mitte der Tafel ziehen. Dann ist es schon fast wieder so wie früher auf der Kreidetafel.

Wenn sie sich auch so was machen wollen, schicke ich Ihnen gerne eine Anleitung. Fordern Sie einfach eine solche per Email bei mir an:  
[peter.meffert@pl.rlp.de](mailto:peter.meffert@pl.rlp.de)

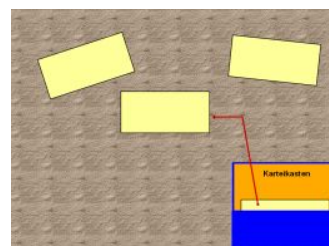


Abb. 6

Diesmal hatten wir zwei Gruppen mit je sechs Kindern gebildet und die Uhr war auf einen Countdown von 30 Min. (siehe Abb. 5) eingestellt. So viel Zeit war nötig, weil die Kinder auch noch nicht viel Erfahrung mit dem IWB hatten. Dabei war bemerkenswert, wie nett die Kinder miteinander umgingen. Je drei Kinder schrieben immer die neun Zahlen auf, die zu einer bestimmten Anfangsziffer gehörten. Dabei überließen sie es den Kleinsten, die unterste Zeile zu schreiben.

## 6 Zur Rolle des Lehrers in dieser neuen Welt

Wenn ich manchmal im Unterricht einige Leute sehe, die sich ausgeklüfft haben, so stelle ich mir vor, was sie gerade denken mögen: „Lass den da vorne nur reden; wenn ich heute

Nachmittag zu Hause bin, schaue ich mir das Ganze auf dem Computer an; da verstehe ich das sowieso besser“.

Ja, gehören wir Lehrerinnen und Lehrer denn schon zum „alten Eisen“? Dazu gibt es einen sehr schönen Zeitschriftenartikel von Elena Pelzer<sup>vii</sup>, in dem über ein Selbstlernsemester (SLS) berichtet wird, das in der Schweiz in die Ausbildung von Lehramtsstudenten eingebaut wurde. Man wollte auf diese Weise Lehrkräfte einsparen. Doch der Spareffekt fiel bescheiden aus und die Lehrerinnen und Lehrer wurden zudem einer größeren Arbeitsbelastung ausgesetzt (wegen der umfangreichen Vorbereitung der Aufgaben). Die Lehrkräfte sind also nicht überflüssig geworden, doch hat sich ihr Berufsbild geändert: Vom Lehrkörper zum Lernberater.

Für Fragen zum Experiment oder das Zusenden einer entsprechenden Anleitung steht der Autor gerne zur Verfügung (Mail an [peter.meffert@pl.rlp.de](mailto:peter.meffert@pl.rlp.de)).

#### **Bildnachweise:**

- Abbildung 1: „Laterne am Weinhaus Hubertus am Florinsmarkt in Koblenz“, © LMZ RP/Petra Camnitzer
- Abbildungen 3, 5 und 6: Screenshot einer mit der Programmiersprache LOGO erstellten Zahlenmatrix, bzw. 2 Screenshots vom IWB, © LMZ RP/Peter Meffert
- Abbildungen 2 und 4: Standbilder aus dem Videofilm zum Unterrichtsexperiment, Verwertungsrechte beim PL-KO

---

<sup>i</sup> Peter Gallin, Urs Ruf, Sprache und Mathematik in der Schule, Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Erschienen in der Kallmeyer'schen Verlagsbuchhandlung in Seelze 1998.

<sup>ii</sup> Peter Gallin, Urs Ruf, Sprache und Mathematik, Ich-Du-Wir, 4. – 5. Schuljahr, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich Ausgabe 1999.

<sup>iii</sup> Volker Ulm, „Das ist neu, das erforsche ich – Einstiege differenzierend gestalten“, Zeitschrift mathematik\_lehren 162, S. 13, Friedrich-Verlag, Seelze, 2010

<sup>iv</sup> Volker Ulm, Objekte in Grafiken, Uni Bayreuth 2003, unter [http://www.lehrer-online.de/dyn/bin/530526-530615-2-objekte\\_in\\_grafiken\\_buch.pdf](http://www.lehrer-online.de/dyn/bin/530526-530615-2-objekte_in_grafiken_buch.pdf).

<sup>v</sup> Begriff aus Moritz Meurer, Entdeckendes Lernen, bibernetz.de, unter <http://www.bibernetz.de/www/entdeckendes-lernen.php?sid=61344808029620681930855335533470>

<sup>vi</sup> Volker Ulm, „Das ist neu, das erforsche ich – Einstiege differenzierend gestalten“, Zeitschrift mathematik\_lehren 162, S. 10, Friedrich-Verlag, Seelze, 2010

<sup>vii</sup> Elena Pelzer, „Werden wir Lehrer überflüssig?“, aus FOCUS-SCHULE, Mittwoch 10.8.2011, unter [http://www.focus.de/schule/schule/unterricht/paedagogik/lernen-werden-lehrer-ueberfluessig\\_aid\\_653948.html](http://www.focus.de/schule/schule/unterricht/paedagogik/lernen-werden-lehrer-ueberfluessig_aid_653948.html).